TD Physique n°7 : Description d'un fluide en écoulement

Exercice 1 : Ecoulement sur un plan incliné

On s'intéresse à l'écoulement de la lave dans un chenal. Le schéma d'un canal incliné de section rectangulaire est présenté sur la Figure 1. On note sa largeur ℓ et θ l'angle d'inclinaison. L'axe Oz est orthogonal au fond du canal et fait donc un angle e avec la verticale. Il est dirigé vers le haut. La profondeur de lave dans le chenal est notée d. Elle est comptée orthogonalement au fond du chenal.

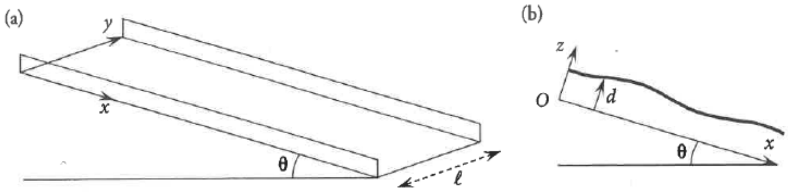


Figure 1. Schéma du canal. (a) Vue en perspective. (b) Vue en coupe dans le plan xOz.

On considère un liquide newtonien incompressible s'écoulant dans un canal de section rectangulaire dont le fond est incliné d'un angle θ par rapport à l'horizontale, On note Oz la direction orthogonale au fond du canal, d la profondeur du liquide et ℓ la largeur du canal. L'écoulement est supposé laminaire et stationnaire. On le suppose aussi bidimensionnel, c'est-à-dire que les variables de l'écoulement ne dépendent pas de la coordonnée transversale y. On le suppose de plus uniforme dans la direction longitudinale Ox, c'est-à-dire que les variables de l'écoulement ne dépendent pas non plus de x. Dans ces conditions, le profil de vitesse dans la profondeur est parabolique et a pour expression : $v(z) = \frac{\rho g z sin\theta}{\eta}\left(d - \frac{z}{2}\right)$. Dans cette expression, ρ est la masse volumique du liquide et η est sa viscosité dynamique.

1. Exprimer la force tangentielle de viscosité par unité de surface s'exerçant sur le liquide au niveau du fond du canal et au niveau de la surface du liquide.
2. Donner l'expression générale du débit volumique D_V en fonction du vecteur vitesse $\vec{v}$.
3. Donner l'expression générale du débit volumique D_V en fonction de la vitesse moyenne, notée V, et des données de l'énoncé.
4. Établir l'expression du débit volumique total dans le canal, D_V.
5. Établir l'expression de la vitesse moyenne sur la profondeur

Exercice n°2 : Sédimentation

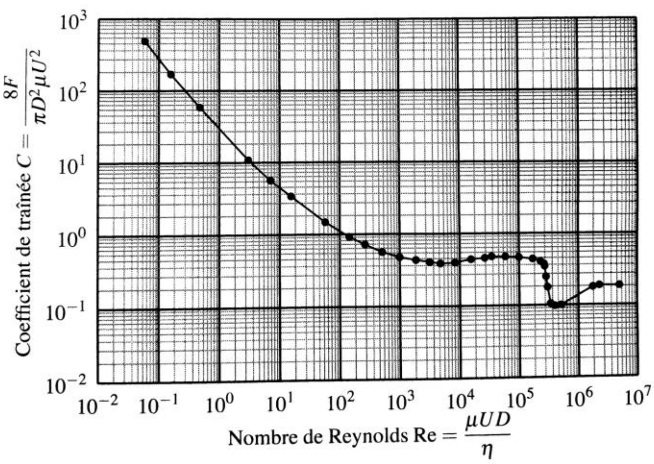
Données

Masses volumiques de quelques matériaux courants :

Matériau	Argile	Sable sec	Silt
Masse volumique (kg.m^{-3})	1,7. 10^3	1,6. 10^3	1,1. 10^3

Viscosité dynamique de l'eau : 1,0.10^{-3} Pl à 20°C

1. On rappelle l'expression de la force de trainée subit par un objet sphérique de diamètre D se déplaçant à une vitesse $\vec{V}$ dans un fluide de masse volumique μ : $F = \frac{1}{2}\mu C_x \pi \frac{D^2}{4} V^2$, où C_x est le coefficient de trainée. Comment s'exprime la force de trainée si l'écoulement est à faible nombre de Reynolds (<1) ?
2. Soit une particule sphérique sédimentant dans un fluide au repos. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par sa vitesse v(t) et la résoudre.
3. Retrouver l'expression de la vitesse limite de sédimentation : $U = \frac{1}{18}\frac{d^2 g \Delta\rho}{\eta}$ où d est le diamètre de la particule, Δρ la différence de masse volumique entre le solide et le fluide et η la viscosité dynamique
4. Au bout de combien de temps cette vitesse est-elle atteinte ? Commenter.
5. Calculer le temps de dépôt au fond de l'océan (4000 m) pour le sable, le silt et l'argile. Les comparer aux valeurs du tableau ci-dessous :



Particule	Taille (µm)	Temps pour atteindre la profondeur de 4 km (jours)	Distance parcourue horizontale (km)
Sable fin	100	4,73	4,09
Silt	10	473	409
Argile	1	47300	40900

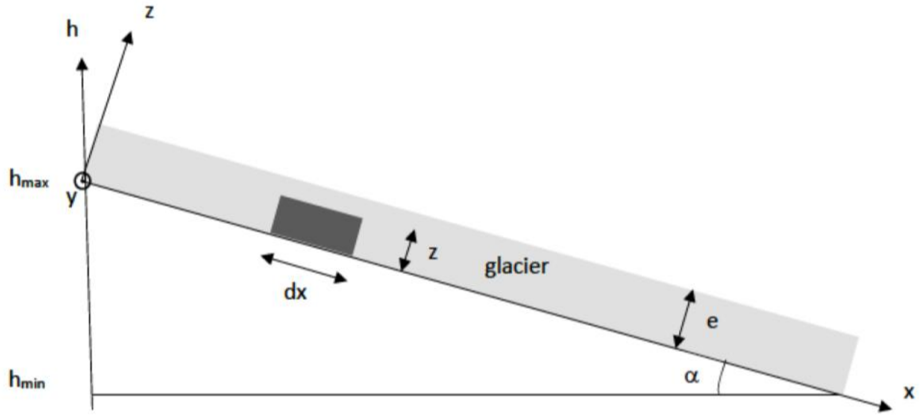
6. Les conditions de validité de l'expression de la force de trainée sont-elles vérifiées dans ces exemples ?

Exercice 3 : Ecoulement dans un glacier

On s'intéresse à l'écoulement du glacier des Bossons dans la vallée de Chamonix : l'altitude maximale du glacier est $h_{max} = 4700\ m$ et son altitude minimale $h_{min} = 1400\ m$. La pente moyenne du glacier, supposée constante, fait un angle $\alpha = 28°$ avec l'horizontale ; son épaisseur supposée constante est $e = 120\ m$ et sa largeur supposée constante est $L = 1200\ m$ (suivant la direction (Oy) perpendiculaire au schéma).

On adopte le système d'axes représenté ci-dessous : (Ox) est dirigé suivant la pente du glacier et (Oz) dirigé suivant la hauteur du glacier.

On donne : la masse volumique de la glace $\rho_{glace} = 920\ kg \cdot m^{-3}$; la viscosité dynamique de la glace considérée comme un fluide newtonien $\eta_{glace} = 1{,}0 \times 10^{10}\ Pa \cdot s$; l'accélération de la pesanteur $g = 9{,}8\ m \cdot s^{-2}$.



En 1966 a eu lieu le crash d'un Boeing 707 d'Air India au sommet du glacier. Parmi la cargaison, des pierres précieuses ont été retrouvées au bas du glacier en 2013 plus tard par un randonneur chanceux.

1. Exprimer littéralement puis calculer numériquement en tonnes, la masse m_{glace} du glacier.
2. A l'aide des données, exprimer littéralement puis calculer numériquement la vitesse d'écoulement U du glacier.
3. Définir puis calculer le nombre de Reynolds R_e associé à l'écoulement du glacier. Conclure sur la nature de l'écoulement.

On s'intéresse à l'écoulement d'une particule fluide de hauteur z et de surface $dS = Ldx$, et représentée sur la figure précédente. On suppose que le glacier s'écoule sous l'effet de son poids en régime permanent, de telle sorte que la force de viscosité $\overrightarrow{dF} = -\tau(z)dS\overrightarrow{e_x}$ est compensée par la composante sur l'axe *(Ox)* du poids de la particule de fluide. $\tau(z)$ correspond à la contrainte tangentielle visqueuse à l'altitude z.

4. Exprimer la contrainte tangentielle visqueuse $\tau(z)$ en fonction de ρ_{glace}, g, z et α.
5. En déduire l'expression de $\tau(z = e)$ puis faire l'application numérique. Comparer la valeur obtenue à la pression atmosphérique.

On suppose que la relation entre le gradient des vitesses U (ou taux de cisaillement) $\dot{\gamma} = \frac{dU}{dz}$ et la contrainte tangentielle visqueuse $\tau(z)$ suit la loi de Glen : $\dot{\gamma} = \frac{dU}{dz} = A(T)\tau_T{}^3$ avec $A(T)$ un facteur dépendant de la température T selon la loi : $A(T) = A_0 exp\left(-\frac{Q}{RT}\right)$ où Q désigne l'énergie d'activation (en $J \cdot mol^{-1}$) associée au phénomène et R la constante des gaz parfaits. On se placera à une température égale à $\theta = -10\ °C$.

6. On rappelle que la force de viscosité de cisaillement pour un fluide newtonien en écoulement unidirectionnel de cisaillement du type $\vec{v} = v_x(y)\overrightarrow{e_x}$ s'écrit : $\overrightarrow{dF} = \pm\eta \frac{dv_x(y)}{dy} dS\overrightarrow{e_x}$. La glace peut-elle être considérée comme un fluide visqueux newtonien ? Justifier.
7. Discuter de l'évolution du taux de cisaillement avec la température.
8. On cherche à déterminer le profil des vitesses $U(z)$. Justifier que $U(z = 0) = 0$.
9. Intégrer la loi de Glen pour en déduire le profil des vitesses $U(z)$.
10. En déduire $U(z = e)$ et faire l'application numérique. On donne : $A = 10^{-24}$ pour $\theta = -10\ °C$. Comparer au résultat de la question **9**.