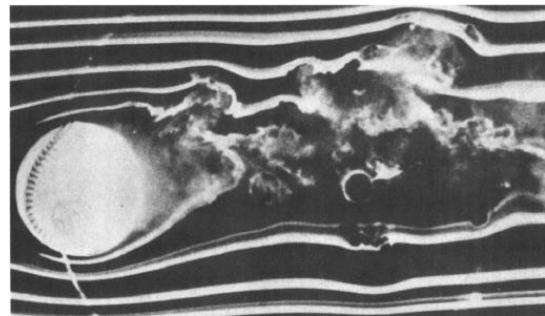


Chapitre 7 : Description d'un fluide en écoulement

I. Fluide en écoulement

1. Cadre d'étude d'un fluide en écoulement



- Particule de fluide et grandeurs caractéristiques**

Etat fluide état liquide (fluide incompressible) ou gazeux (fluide compressible)

Grandeurs intensives caractéristiques :

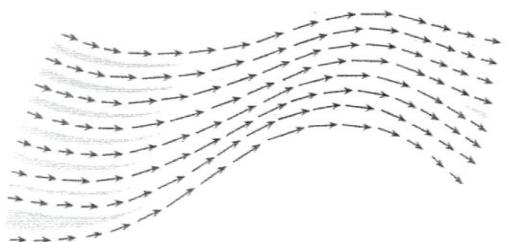
T, P

$$\begin{aligned} \text{masse volumique} \quad & \rho = \frac{m}{V} \text{ pour un milieu homogène} \\ & \rho = \frac{dm}{dV} \quad \text{pour un milieu quelconque (définie localement).} \\ & \rho_{\text{liquide}} \approx 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \gg \rho_{\text{gaz}} \approx 0,5 \text{ kg/m}^3 \end{aligned}$$

Echelle mésoscopique : A cette échelle, le fluide est « découpé » en **particule de fluide** de masse dm et de volume dV, suffisamment grand (au niveau microscopique) pour contenir un grand nombre de particules ($dV_{\text{gaz}} \approx 1 \text{ mm}^3$ $dV_{\text{liquide}} \approx 1 \mu\text{m}^3$), et suffisamment petit (au niveau macroscopique) pour pouvoir définir localement les grandeurs macroscopiques telles que la masse volumique $\rho(M, t)$, la pression $P(M, t)$, la température $T(M, t)$

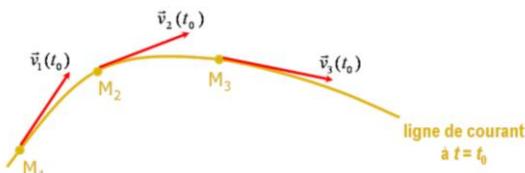
- Champ eulérien des vitesses**

- Description de l'écoulement du fluide sans faire référence à une particule de fluide particulière et en se plaçant, à chaque instant t, en un point particulier M (x,y,z) de l'écoulement.
- Le mouvement du fluide est alors défini par le champ des vitesses, grandeur locale cours du temps $\vec{v}(M, t)$, qui correspond à la vitesse de la particule de fluide passant en M à l'instant t. L'ensemble des vitesses $\vec{v}(M, t)$ définit le **champ eulérien des vitesses**.



2. Ligne de courant et tube de courant

- Ligne de courant** = courbe tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse $\vec{v}(M, t)$ à un instant donné



Propriétés :

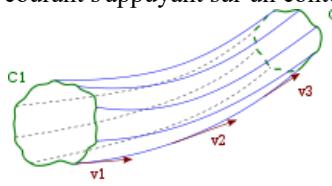
1) deux lignes de courant à un instant donné ne peuvent se croiser

2) un resserrement des lignes de courant indique une augmentation de la vitesse des particules de fluide

Notion de point d'arrêt : point de l'écoulement où la vitesse locale des particules du fluide est nulle

Cas particulier d'un régime stationnaire : les lignes de courant correspondent aux trajectoires des particules de fluide

- **Tube de courant** = ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé



3. Les différents types d'écoulement d'un fluide

- **Ecoulement stationnaire :**

Un écoulement est stationnaire si tous les champs eulériens sont indépendants du temps :

$$\rho(M, t) = \rho(M); \vec{v}(M, t) = \vec{v}(M); P(M, t) = P(M)$$

- **Ecoulement incompressible :**

Un écoulement est incompressible si toute particule fluide garde un volume invariable (constant) au cours de son mouvement.

Remarque : un fluide incompressible donne toujours un écoulement incompressible mais l'inverse n'est pas toujours vrai, un gaz pouvant s'écouler de manière incompressible.

- **Ecoulement unidirectionnel :**

La vitesse de toutes les particules de fluide est parallèle à une direction fixe pour tout instant : les lignes de courant sont alors parallèles entre elles.

Exemple :

- **Ecoulement parallèle**

Ecoulement unidirectionnel invariant suivant la direction de l'écoulement, donc variant seulement dans le plan transverse à l'écoulement

Exemple :

4. Débit de masse et de volume

- **Débit de masse** = masse de fluide en écoulement traversant une section de la conduite par unité de temps

- **Débit de volume** = volume de fluide en écoulement traversant une section de la conduite par unité de temps

- **Cas particuliers importants**

Ecoulement incompressible :

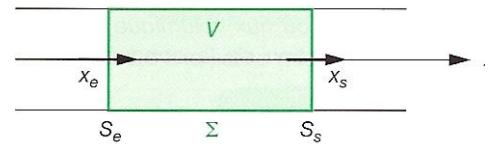
Cas où la vitesse est uniforme sur la surface :

II. Bilan de masse

1. Rappel : description d'un système ouvert

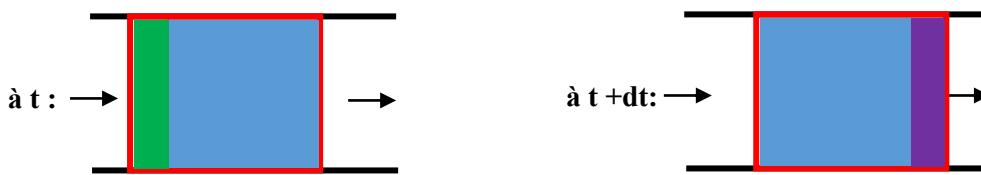
- On considère un fluide (gaz ou liquide) en écoulement dans une conduite de forme quelconque :

- S_e et S_s sections, non rigides, d'entrée et de sortie du système
- Σ :
- V :



- Le système fluide, délimité par la surface de contrôle Σ , est dit **ouvert** car il existe des transferts de matière entre la surface Σ et le milieu fluide extérieur à travers les sections S_e et S_s . Le volume de contrôle ne contient pas les mêmes particules de fluide au cours du temps.

2. Rappel : d'un système ouvert Σ à un système fermé Σ^*



$\Sigma^*(t)$: fluide contenu dans $\Sigma(t)$ + élément de fluide de masse δm_e qui va rentrer dans Σ entre t et $t+dt$.

$\Sigma^*(t+dt)$: fluide contenu dans $\Sigma(t+dt)$ + élément de fluide de masse δm_s qui est sortie de Σ entre t et $t+dt$.

3. Bilan de masse pour un fluide en écoulement

- $m^*(t)$ = masse de fluide contenu dans le système fermé à l'instant t : $m^*(t) = \dots$
- $m^*(t+dt)$ = la masse de fluide contenu dans le système fermé à l'instant $t+dt$: $m^*(t+dt) = \dots$
- Système fermé \Rightarrow

Cas d'un écoulement stationnaire :

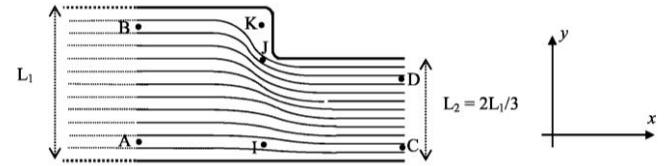
$$\frac{dm}{dt} = \dots$$

$$D_m = \dots$$

pour un fluide incompressible ($\rho=\text{cste}$), on a aussi : $D_V = \dots$

Application n°1 : Ecoulement dans un canal

On considère l'écoulement stationnaire, supposé incompressible, d'eau liquide, dans un canal rectiligne de section rectangulaire. La base de ce canal se situe dans le plan horizontal O_{xy} . Sa hauteur $h = 50\text{cm}$ est constante selon z . Ce canal subit localement un brusque rétrécissement, sa largeur passe de $L_1 = 50\text{cm}$ à $L_2 = 2L_1/3 = 33\text{cm}$. La figure ci-dessus représente les lignes de courant de l'écoulement, de part et d'autre du rétrécissement. Loin du rétrécissement, le champ des vitesses est supposé uniforme sur un plan transverse à l'écoulement.

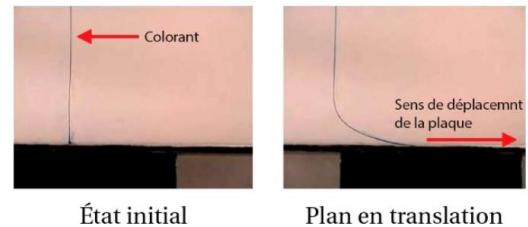
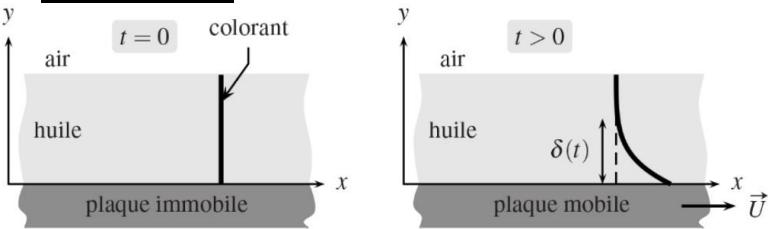


1. Comparer $v(J)$, $v(K)$, $v(A)$ et $v(C)$.
2. La vitesse au point A est de $0,5 \text{ m.s}^{-1}$. Déterminer le débit volumique dans la canalisation. En déduire la vitesse $v(C)$.

III. Actions mécaniques dans un fluide en écoulement

1. Force de viscosité de cisaillement

a. Mise en évidence



b. Force tangentielle de viscosité = force de viscosité de cisaillement

\overrightarrow{dF} : force exercée par la couche supérieure sur la couche inférieure

$$\overrightarrow{dF} = \overrightarrow{dF_N} + \overrightarrow{dF_T}$$

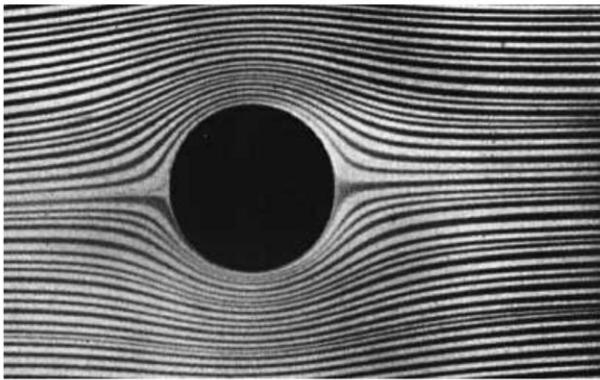
avec :

$\overrightarrow{dF_T}$: **force tangentielle = force de viscosité de cisaillement**

$\overrightarrow{dF_N}$: force normale = force pressante.

c. Écoulement laminaire / turbulent

L'écoulement est dit **laminaire** si les couches glissent les unes sur les autres sans se mélanger. La répartition des vitesses est bien régulière, l'écoulement est « régulier » et « stable ». Sinon il est dit **turbulent** (présence de tourbillons dans l'écoulement) : « fluctuant » et « instable ».



Écoulement laminaire



Écoulement présentant une zone turbulente

d. Fluide visqueux newtonien

- Pour un **écoulement unidirectionnel laminaire parallèle**, pour lequel $\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x$, le fluide est **newtonien** si la force de viscosité de cisaillement exercée par la couche de fluide supérieure sur une surface dS de la couche inférieure (par rapport à l'axe (Oy)) s'écrit :

$$\overrightarrow{dF} = \eta \frac{dv_x(y)}{dy} dS \vec{e}_x \quad \text{où } \eta = \text{viscosité dynamique (en poiseuille } P\ell \text{ ou } Pa \cdot s)$$

Analyse dimensionnelle :

$$\text{Valeurs : } \eta_{air} \approx 10^{-5} Pl \quad \eta_{eau} \approx 10^{-3} Pl = 1 mPl \quad \eta_{glacier} \approx 10^{+11} Pl$$

- Remarque :** la force de viscosité de cisaillement exercée par la couche de fluide inférieure sur une surface dS de la couche supérieure (par rapport à l'axe (Oy)) s'écrit : $\overrightarrow{dF} = -\eta \frac{dv_x(y)}{dy} dS \vec{e}_x$
- Généralisation** pour un écoulement laminaire cylindrique, pour lequel $\vec{v} = v_x(r)\vec{u}_x$, le fluide est newtonien si la force de viscosité de cisaillement exercée par la couche de fluide supérieure sur la couche inférieure (par rapport à r croissant) s'écrit : $\overrightarrow{dF} = \eta \frac{dv_x(r)}{dr} dS \vec{e}_x$

e. Cas des fluides non-newtoniens

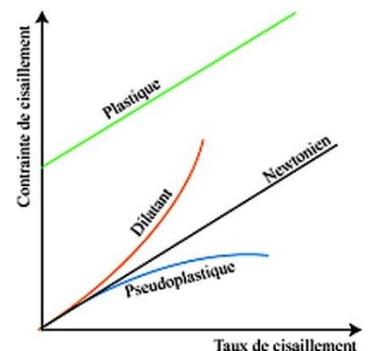
$$\text{Contrainte de cisaillement : } \frac{\|\overrightarrow{dF}\|}{dS}$$

$$\text{Taux de cisaillement} = \text{gradient de vitesse} \left| \frac{dv_x}{dy} \right|$$

Fluide newtonien : la viscosité est constante (la contrainte de cisaillement est proportionnelle au taux de cisaillement)

Rhéofluidifiant (pseudo-plastique) : la viscosité diminue lorsque le taux (ou la contrainte) de cisaillement augmente (cas général)

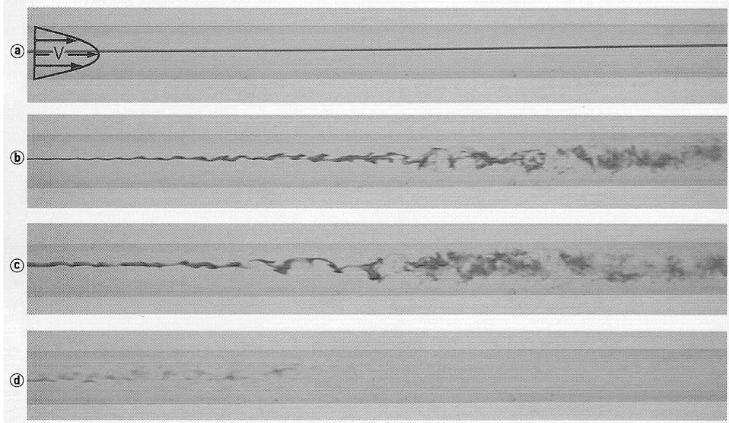
Rhéoépaississant : la viscosité augmente lorsque le taux (ou la contrainte) de cisaillement augmente



Application n°2 :

- Un liquide newtonien, de viscosité dynamique η s'écoule entre deux plans infinis parallèles distants de h et orthogonaux à l'axe Oz des coordonnées.
- le plan en $z = 0$ est immobile alors que le plan en $z = h$ est en translation rectiligne uniforme à la vitesse \vec{V} dans la direction Ox de vecteur unitaire \vec{u}_x .
- On suppose que l'écoulement est stationnaire et que le profil des vitesses est linéaire selon Oz . Le champ des vitesses dans le fluide s'écrit donc : $\vec{v} = v(z)\vec{u}_x$.

- Donner l'expression du champ des vitesses dans le fluide en fonction de V , h et z .
- Établir l'expression de la force de viscosité de cisaillement subie par une section carrée de côté a du plan inférieur.

**2. Nombre de Reynolds – Ecoulements laminaire et turbulent****a. Nombre de Reynolds R_e** **b. Ecoulement laminaire et écoulement turbulent****c. Expression des grandeurs caractéristiques**

	Ecoulement dans une conduite	Ecoulement autour d'un objet sphérique
Vitesse caractéristique U		
Longueur caractéristique L		

Exemples :

- Ecoulement du miel $\eta_{miel} = 10 \text{ Pl}$; $\rho_{miel} = 1,4 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$:

- Ecoulement de l'eau autour d'une bille en chute dans un verre d'eau $\eta_{eau} = 10^{-3} \text{ Pl}$:

3. Traînée d'une sphère en mouvement rectiligne uniforme dans un fluide newtonien

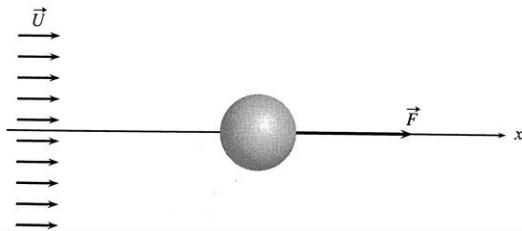
a. Force de trainée

• Définition

Force de frottement s'opposant au mouvement d'un corps dans un liquide ou un gaz au repos loin de l'objet. Cette force est orientée dans le sens opposé à la vitesse \vec{V} de déplacement de l'objet.

• Remarque : mesure expérimentale

Changement de référentiel : objet immobile dans un écoulement dont la vitesse loin de l'objet est : $\vec{U} = -\vec{V}$



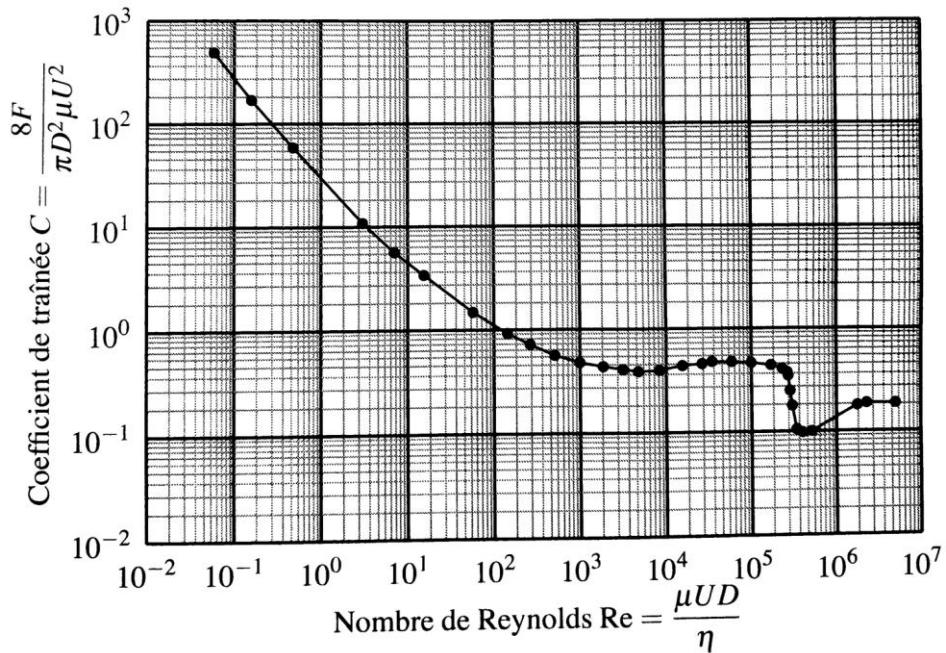
• Expression dans le cas d'un mouvement de translation uniforme ($\vec{V} = \overline{cst}$)

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho C_x S V \vec{V} \quad \text{Cas d'une sphère de diamètre } D=2R : \vec{F} = -\frac{1}{2}\rho C_x \pi R^2 V \vec{V} = -\frac{1}{2}\rho C_x \pi \frac{D^2}{4} V \vec{V}$$

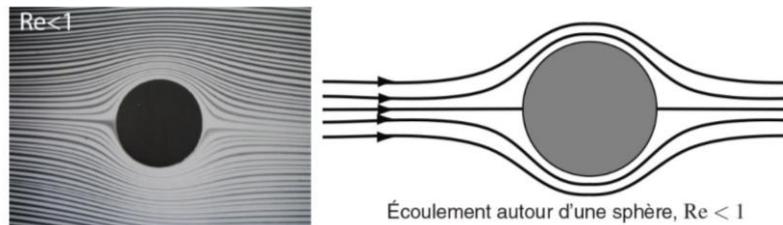
• C_x : Coefficient de trainée

Analyse dimensionnelle :

- Coefficient de trainée en fonction du nombre de Reynolds**



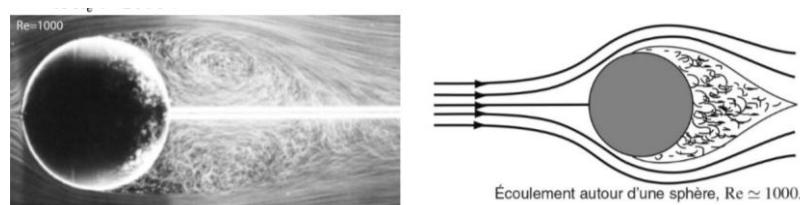
Cas où $Re < 1$:



$$C_x = \frac{24}{Re} \Rightarrow$$

La norme de la force de trainée est proportionnelle à la norme de la vitesse : on parle de **modèle de trainée linéaire** en vitesse

Cas où $10^3 < Re < 10^5$:



$$C_x \approx cst \approx 0,4 \Rightarrow$$

La norme de la force de trainée varie comme le carré de la norme de la vitesse : on parle de **modèle de trainée quadratique** en vitesse

b. Application à l'évolution de la vitesse en fonction du temps dans le cas de la chute d'une bille sphérique

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import odeint
4
5 #Paramètres
6 g=9.81 #m/s^2
7 m=0.005 #kg
8 R=0.005 #m
9 rho=1000 #kg/m3
10 nu=1E-6 #m2/s^-1

```

Modélisation du coefficient de Trainée selon la valeur du nombre de Reynolds

```

12 #Modélisation du coefficient de Trainée
13 def Cx(Re):
14     if Re==0:
15         return 0
16     elif Re<1:
17         return 24/Re           #régime de Stokes Re<=1
18     elif 1<=Re<=1000:
19         return 24/Re*(1+0.15*Re**0.687)
20     elif 1000<=Re<=1E5:    #régime de Newton
21         return 0.5
22     else:
23         return 0.2

```

Méthode d'intégration n°1 : méthode d'Euler

```

25 #Evolution de la vitesse de la bille en fonction du temps : méthode d'Euler
26 h=0.01 #pas
27 duree = 2 #s
28 N=duree/h #nombre de points
29
30 V0=0 #m/s   vitesse initiale
31
32 t=[0]      #création d'une liste temps
33 V=[V0]      #création d'une liste vitesse
34 i=1         #incrément itération
35
36 while i<=N :
37     Re=2*R*V[-1]/nu
38     t.append(i*h)
39     V.append(V[-1]+(g-1/2*rho*Cx(Re)*np.pi*R**2*V[-1]**2/m)*h)
40     i=i+1

```

Méthode d'intégration n°2 : utilisation de la fonction Odeint

```

43 #Evolution de la vitesse de la bille en fonction du temps : Odeint
44 t0,tmax=0,2
45 N=1000
46 t=np.linspace(t0,tmax,N)
47
48 Y0=[h0,0]
49
50 def derive(Y,t):
51     z=Y[0]
52     V=Y[1]
53     Re=2*R*V/nu
54     return(V,g-1/2*rho*Cx(Re)*np.pi*R**2*V**2/m)
55
56 solution=odeint(derive,Y0,t)
57 V=solution[:,1]

```

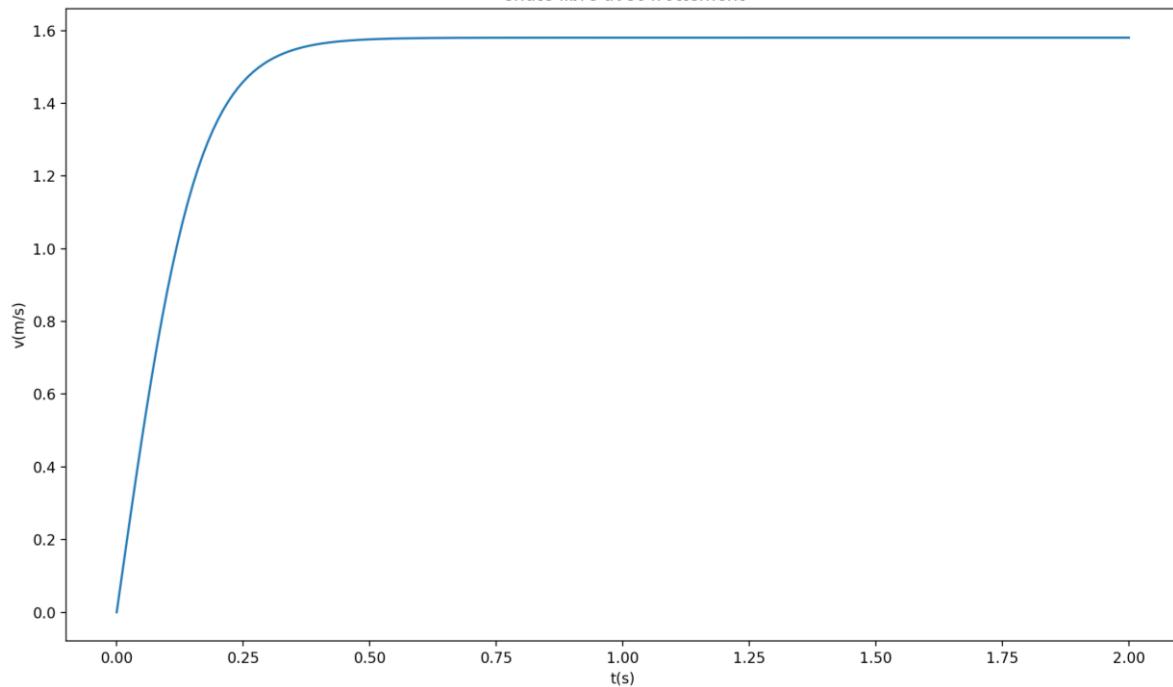
Tracé de la vitesse en fonction du temps

```

59 plt.plot(t,V)
60 plt.xlabel("t(s)")
61 plt.ylabel("v(m/s)")
62 plt.title("Chute libre avec frottement")
63 plt.show()
64

```

Chute libre avec frottement



Les questions à se poser à l'issue de ce chapitre

Vocabulaire

- *Est-ce que je sais définir / illustrer les termes suivants :*
 - particule de fluide
 - champ eulérien des vitesses
 - ligne de courant
 - tube de courant
 - écoulement stationnaire
 - écoulement incompressible
 - écoulement unidirectionnel
 - écoulement parallèle

- *Est-ce que je sais faire la distinction entre écoulement laminaire et turbulent ?*

- *Est-ce que je sais à quoi correspond un fluide newtonien ?*

- *Est-ce que je sais à quoi correspond un débit de masse et de volume ?*

Bilan de masse

- *Est-ce que je sais passer d'un système ouvert à un système fermé ?*
- *Est-ce que je sais établir le bilan de masse pour un fluide en écoulement ?*

Actions mécaniques dans un fluide en écoulement

- *Est-ce que je sais à quoi correspond la force de viscosité de cisaillement ?*
- *Est-ce que je sais exprimer le nombre de Reynolds ?*
- *Est-ce que je connais l'expression de la force de trainée dans le cas d'un mouvement de translation uniforme ?*
- *Est-ce que je sais évaluer un nombre de Reynolds et choisir le modèle de la force de trainée ?*
- *Est-ce que je sais lire / compléter / exploiter un script python qui permet de résoudre l'équation différentielle vérifiée par la vitesse ?*