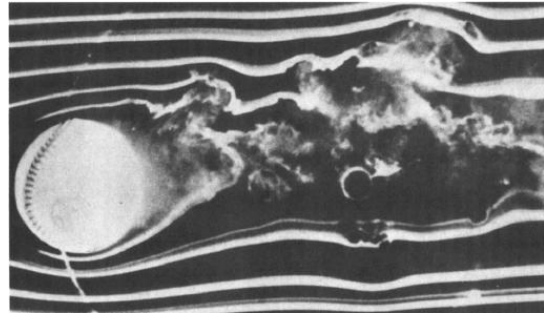


## Chapitre 7 : Description d'un fluide en écoulement

### I. Fluide en écoulement

#### 1. Cadre d'étude d'un fluide en écoulement



- Particule de fluide et grandeurs caractéristiques**

**Etat fluide** état liquide (fluide incompressible) ou gazeux (fluide compressible)

**Grandeurs intensives caractéristiques :**

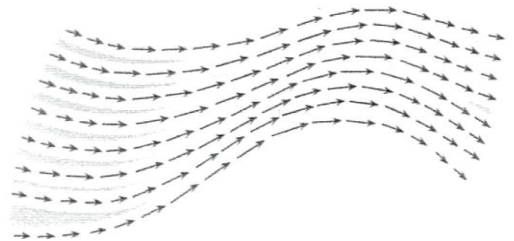
$T, P$

masse volumique  $\rho = \frac{m}{V}$  pour un milieu homogène  
 $\rho = \frac{dm}{dV}$  pour un milieu quelconque (définie localement).  
 $\rho_{\text{liquide}} \approx 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 \gg \rho_{\text{gaz}} \approx 0,5 \text{ kg/m}^3$

**Echelle mésoscopique :** A cette échelle, le fluide est « découpé » en **particule de fluide** de masse  $dm$  et de volume  $dV$ , suffisamment grand (au niveau microscopique) pour contenir un grand nombre de particules ( $dV_{\text{gaz}} \approx 1 \text{ mm}^3$ ,  $dV_{\text{liquide}} \approx 1 \mu\text{m}^3$ ), et suffisamment petit (au niveau macroscopique) pour pouvoir définir localement les grandeurs macroscopiques telles que la masse volumique  $\rho(M, t)$ , la pression  $P(M, t)$ , la température  $T(M, t)$

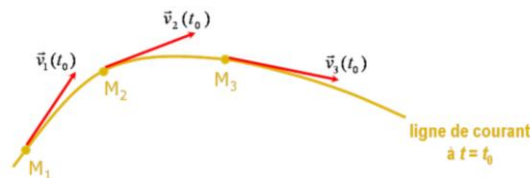
- Champ eulérien des vitesses**

- Description de l'écoulement du fluide sans faire référence à une particule de fluide particulière et en se plaçant, à chaque instant  $t$ , en un point particulier  $M(x, y, z)$  de l'écoulement.
- Le mouvement du fluide est alors défini par le champ des vitesses, grandeur locale cours du temps  $\vec{v}(M, t)$ , qui correspond à la vitesse de la particule de fluide passant en  $M$  à l'instant  $t$ . L'ensemble des vitesses  $\vec{v}(M, t)$  définit le **champ eulérien des vitesses**.



#### 2. Ligne de courant et tube de courant

- Ligne de courant** = courbe tangente en chacun de ses points au vecteur vitesse  $\vec{v}(M, t)$  à un instant donné



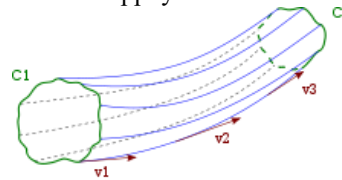
**Propriétés :** 1) deux lignes de courant à un instant donné ne peuvent se croiser

2) un resserrement des lignes de courant indique une augmentation de la vitesse des particules de fluide

**Notion de point d'arrêt :** point de l'écoulement où la vitesse locale des particules du fluide est nulle

**Cas particulier d'un régime stationnaire :** les lignes de courant correspondent aux trajectoires des particules de fluide

- **Tube de courant** = ensemble des lignes de courant s'appuyant sur un contour fermé



### 3. Les différents types d'écoulement d'un fluide

- **Écoulement stationnaire :**

Un écoulement est stationnaire si tous les champs eulériens sont indépendants du temps :

$$\rho(M, t) = \rho(M) ; \vec{v}(M, t) = \vec{v}(M) ; P(M, t) = P(M)$$

- **Écoulement incompressible :**

Un écoulement est incompressible si toute particule fluide garde un volume invariable (constant) au cours de son mouvement.

**Remarque :** un fluide incompressible donne toujours un écoulement incompressible mais l'inverse n'est pas toujours vrai, un gaz pouvant s'écouler de manière incompressible.

- **Écoulement unidirectionnel :**

La vitesse de toutes les particules de fluide est parallèle à une direction fixe pour tout instant : les lignes de courant sont alors parallèles entre elles.

Exemple :

- **Écoulement parallèle**

Écoulement unidirectionnel invariant suivant la direction de l'écoulement, donc variant seulement dans le plan transverse à l'écoulement

Exemple :

### 4. Débit de masse et de volume

- **Débit de masse** = masse de fluide en écoulement traversant une section de la conduite par unité de temps
- **Débit de volume** = volume de fluide en écoulement traversant une section de la conduite par unité de temps
- **Cas particuliers importants**

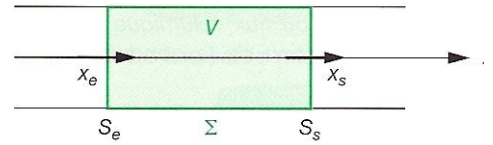
Écoulement incompressible :

Cas où la vitesse est uniforme sur la surface :

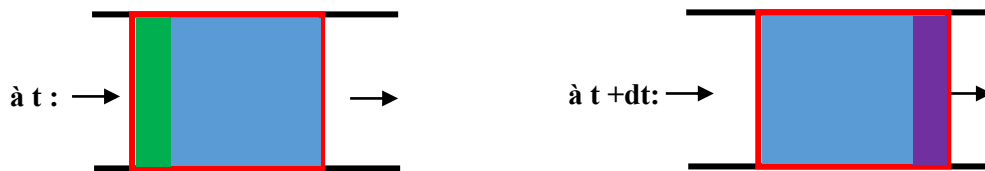
## II. Bilan de masse

### 1. Rappel : description d'un système ouvert

- On considère un fluide (gaz ou liquide) en écoulement dans une conduite de forme quelconque :
  - $S_e$  et  $S_s$  sections, non rigides, d'entrée et de sortie du système
  - $\Sigma$  : .....
  - $V$  : .....
- Le système fluide, délimité par la surface de contrôle  $\Sigma$ , est dit **ouvert** car il existe des transferts de matière entre la surface  $\Sigma$  et le milieu fluide extérieur à travers les sections  $S_e$  et  $S_s$ . Le volume de contrôle ne contient pas les mêmes particules de fluide au cours du temps.



### 2. Rappel : d'un système ouvert $\Sigma$ à un système fermé $\Sigma^*$



$\Sigma^*(t)$  : fluide contenu dans  $\Sigma(t)$  + élément de fluide de masse  $\delta m_e$  qui va rentrer dans  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t+dt$ .

$\Sigma^*(t+dt)$  : fluide contenu dans  $\Sigma(t+dt)$  + élément de fluide de masse  $\delta m_s$  qui est sortie de  $\Sigma$  entre  $t$  et  $t+dt$ .

### 3. Bilan de masse pour un fluide en écoulement

- $m^*(t)$  = masse de fluide contenu dans le système fermé à l'instant  $t$  :  $m^*(t) = \dots\dots\dots$
- $m^*(t+dt)$  = la masse de fluide contenu dans le système fermé à l'instant  $t+dt$  :  $m^*(t+dt) = \dots\dots\dots$
- Système fermé  $\Rightarrow$

#### Cas d'un écoulement stationnaire :

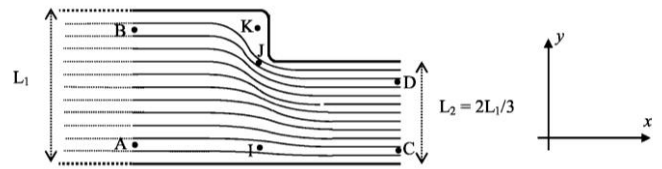
$$\frac{dm}{dt} = \dots\dots\dots$$

$$D_m = \dots\dots\dots$$

pour un fluide incompressible ( $\rho = \text{cste}$ ), on a aussi :  $D_V = \dots\dots\dots$

### Application n°1 : Écoulement dans un canal

On considère l'écoulement stationnaire, supposé incompressible, d'eau liquide, dans un canal rectiligne de section rectangulaire. La base de ce canal se situe dans le plan horizontal  $O_{xy}$ . Sa hauteur  $h = 50\text{cm}$  est constante selon  $z$ . Ce canal subit localement un brusque rétrécissement, sa largeur passe de  $L_1 = 50\text{cm}$  à  $L_2 = 2 L_1 / 3 = 33\text{cm}$ . La figure ci-dessus représente les lignes de courant de l'écoulement, de part et d'autre du rétrécissement. Loin du rétrécissement, le champ des vitesses est supposé uniforme sur un plan transverse à l'écoulement.

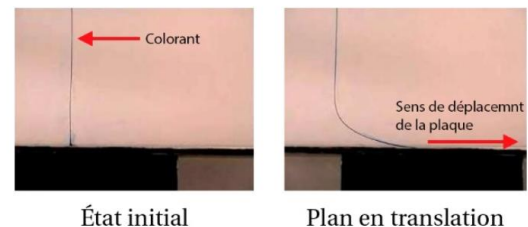
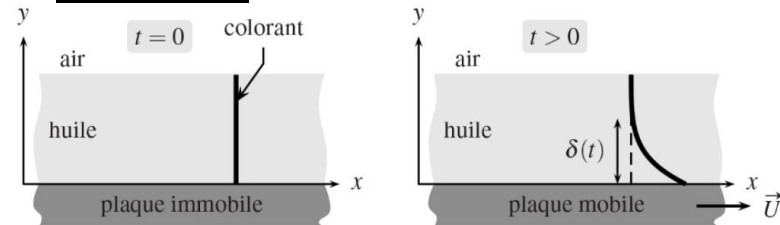


1. Comparer  $v(J)$ ,  $v(K)$ ,  $v(A)$  et  $v(C)$ .
2. La vitesse au point A est de  $0,5 \text{ m.s}^{-1}$ . Déterminer le débit volumique dans la canalisation. En déduire la vitesse  $v(C)$ .

### III. Actions mécaniques dans un fluide en écoulement

#### 1. Force de viscosité de cisaillement

##### a. Mise en évidence



##### b. Force tangentielle de viscosité = force de viscosité de cisaillement

$\vec{dF}$  : force exercée par la couche supérieure sur la couche inférieure

$$\vec{dF} = \vec{dF}_N + \vec{dF}_T$$

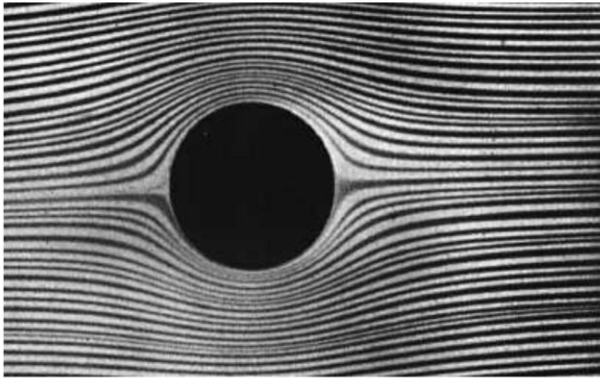
avec :

$\vec{dF}_T$  : force tangentielle = force de viscosité de cisaillement

$\vec{dF}_N$  : force normale = force pressante.

### c. Écoulement laminaire / turbulent

L'écoulement est dit **laminaire** si les couches glissent les unes sur les autres sans se mélanger. La répartition des vitesses est bien régulière, l'écoulement est « régulier » et « stable ». Sinon il est dit **turbulent** (présence de tourbillons dans l'écoulement) : « fluctuant » et « instable ».



Écoulement laminaire



Écoulement présentant une zone turbulente

### d. Fluide visqueux newtonien

- Pour un **écoulement unidirectionnel laminaire parallèle**, pour lequel  $\vec{v} = v_x(y)\vec{e}_x$ , le fluide est **newtonien** si la force de viscosité de cisaillement exercée par la couche de fluide supérieure sur une surface  $dS$  de la couche inférieure (par rapport à l'axe (Oy)) s'écrit :

$$\vec{dF} = \eta \frac{dv_x(y)}{dy} dS \vec{e}_x \quad \text{où } \eta = \text{viscosité dynamique (en poiseuille } Pl \text{ ou } Pa \cdot s)$$

Analyse dimensionnelle :

Valeurs :  $\eta_{air} \approx 10^{-5} Pl$   $\eta_{eau} \approx 10^{-3} Pl = 1 mPl$   $\eta_{glacier} \approx 10^{+11} Pl$

- Remarque** : la force de viscosité de cisaillement exercée par la couche de fluide inférieure sur une surface  $dS$  de la couche supérieure (par rapport à l'axe (Oy)) s'écrit :  $\vec{dF} = -\eta \frac{dv_x(y)}{dy} dS \vec{e}_x$
- Généralisation** pour un écoulement laminaire cylindrique, pour lequel  $\vec{v} = v_x(r)\vec{u}_x$ , le fluide est newtonien si la force de viscosité de cisaillement exercée par la couche de fluide supérieure sur la couche inférieure (par rapport à r croissant) s'écrit :  $\vec{dF} = \eta \frac{dv_x(r)}{dr} dS \vec{e}_x$

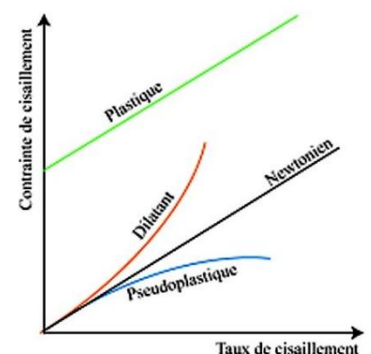
#### • Cas des fluides non-newtoniens

Contrainte de cisaillement :  $\frac{\|\vec{dF}\|}{dS}$  Taux de cisaillement = gradient de vitesse  $\left| \frac{dv_x}{dy} \right|$

**Fluide newtonien** : la viscosité est constante (la contrainte de cisaillement est proportionnelle au taux de cisaillement)

**Rhéofluidifiant** (pseudo-plastique) : la viscosité diminue lorsque le taux (ou la contrainte) de cisaillement augmente (cas général)

**Rhéopaississant** : la viscosité augmente lorsque le taux (ou la contrainte) de cisaillement augmente

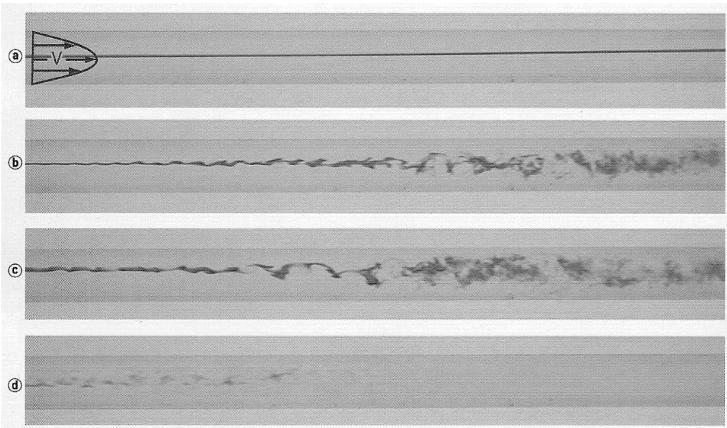


**Application n°2 :**

- Un liquide newtonien, de viscosité dynamique  $\eta$  s'écoule entre deux plans infinis parallèles distants de  $h$  et orthogonaux à l'axe  $Oz$  des coordonnées.
- le plan en  $z = 0$  est immobile alors que le plan en  $z = h$  est en translation rectiligne uniforme à la vitesse  $\vec{V}$  dans la direction  $Ox$  de vecteur unitaire  $\vec{u}_x$ .
- On suppose que l'écoulement est stationnaire et que le profil des vitesses est linéaire selon  $Oz$ . Le champ des vitesses dans le fluide s'écrit donc :  $\vec{v} = v(z)\vec{u}_x$ .



- Donner l'expression du champ des vitesses dans le fluide en fonction de  $V$ ,  $h$  et  $z$ .
- Établir l'expression de la force de viscosité de cisaillement subie par une section carrée de côté  $a$  du plan inférieur.

**2. Nombre de Reynolds – Ecoulements laminaire et turbulent****a. Nombre de Reynolds  $R_e$** **b. Ecoulement laminaire et écoulement turbulent****c. Expression des grandeurs caractéristiques**

	Ecoulement dans une conduite	Ecoulement autour d'un objet sphérique
Vitesse caractéristique $U$		
Longueur caractéristique $L$		

**Exemples :**

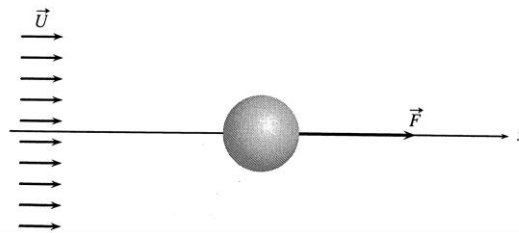
- Ecoulement du miel  $\eta_{miel} = 10 \text{ Pl}$  ;  $\rho_{miel} = 1,4 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  :
- Ecoulement de l'eau autour d'une bille en chute dans un verre d'eau  $\eta_{eau} = 10^{-3} \text{ Pl}$  :

**3. Traînée d'une sphère en mouvement rectiligne uniforme dans un fluide newtonien****a. Force de trainée**• **Définition**

Force de frottement s'opposant au mouvement d'un corps dans un liquide ou un gaz au repos loin de l'objet. Cette force est orientée dans le sens opposé à la vitesse  $\vec{V}$  de déplacement de l'objet.

• **Remarque : mesure expérimentale**

Changement de référentiel : objet immobile dans un écoulement dont la vitesse loin de l'objet est :  $\vec{U} = -\vec{V}$

• **Expression dans le cas d'un mouvement de translation uniforme ( $\vec{V} = \overrightarrow{cst}$ )**

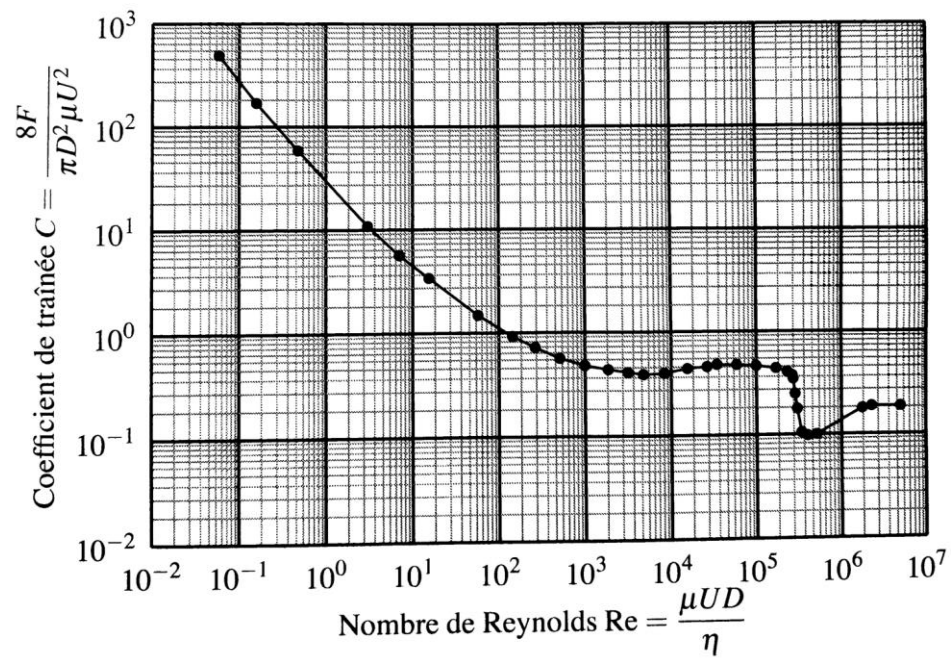
$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho C_x S V \vec{V} \quad \text{Cas d'une sphère de diamètre } D=2R : \vec{F} = -\frac{1}{2}\rho C_x \pi R^2 V \vec{V} = -\frac{1}{2}\rho C_x \pi \frac{D^2}{4} V \vec{V}$$

•  **$C_x$  : Coefficient de trainée**

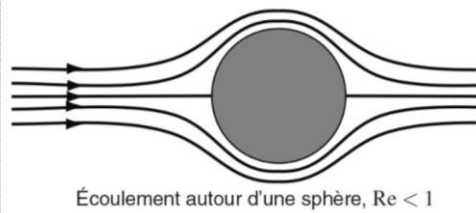
Analyse dimensionnelle :



- Coefficient de traînée en fonction du nombre de Reynolds



Cas où  $Re < 1$  :

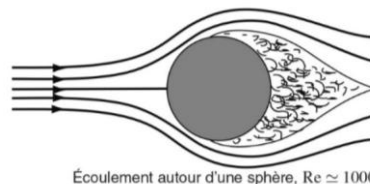
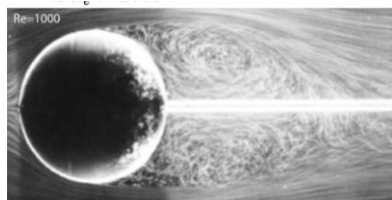


Écoulement autour d'une sphère,  $Re < 1$

$$C_x = \frac{24}{Re} \Rightarrow$$

La norme de la force de traînée est proportionnelle à la norme de la vitesse : on parle de **modèle de traînée linéaire** en vitesse

Cas où  $10^3 < Re < 10^5$  :



Écoulement autour d'une sphère,  $Re \approx 1000$ .

$$C_x \approx cst \approx 0,4 \Rightarrow$$

La norme de la force de traînée varie comme le carré de la norme de la vitesse : on parle de **modèle de traînée quadratique** en vitesse



## b. Application à l'évolution de la vitesse en fonction du temps dans le cas de la chute d'une bille sphérique

```

1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3 from scipy.integrate import odeint
4
5 #Paramètres
6 g=9.81 #m/s^2
7 m=0.005 #kg
8 R=0.005 #m
9 rho=1000 #kg/m3
10 nu=1E-6 #m2/s^-1

```

### Modélisation du coefficient de Trainée selon la valeur du nombre de Reynolds

```

12 #Modélisation du coefficient de Trainée
13 def Cx(Re):
14     if Re==0:
15         return 0
16     elif Re<1:
17         return 24/Re          #régime de Stokes Re<=1
18     elif 1<=Re<=1000:
19         return 24/Re*(1+0.15*Re**0.687)
20     elif 1000<=Re<=1E5:
21         return 0.5          #régime de Newton
22     else:
23         return 0.2

```

### Méthode d'intégration n°1 : méthode d'Euler

```

25 #Evolution de la vitesse de la bille en fonction du temps : méthode d'Euler
26 h=0.01 #pas
27 duree = 2 #s
28 N=duree/h #nombre de points
29
30 V0=0 #m/s    vitesse initiale
31
32 t=[0]        #création d'une liste temps
33 V=[V0]       #création d'une liste vitesse
34 i=1          #incrément itération
35
36 while i<=N :
37     Re=2*R*V[-1]/nu
38     t.append(i*h)
39     V.append(V[-1]+(g-1/2*rho*Cx(Re)*np.pi*R**2*V[-1]**2/m)*h)
40     i=i+1

```

### Méthode d'intégration n°2 : utilisation de la fonction Odeint

```

43 #Evolution de la vitesse de la bille en fonction du temps : Odeint
44 t0,tmax=0,2
45 N=1000
46 t=np.linspace(t0,tmax,N)
47
48 Y0=[h0,0]
49
50 def derive(Y,t):
51     z=Y[0]
52     V=Y[1]
53     Re=2*R*V/nu
54     return(V,g-1/2*rho*Cx(Re)*np.pi*R**2*V**2/m)
55
56 solution=odeint(derive,Y0,t)
57 V=solution[:,1]
58

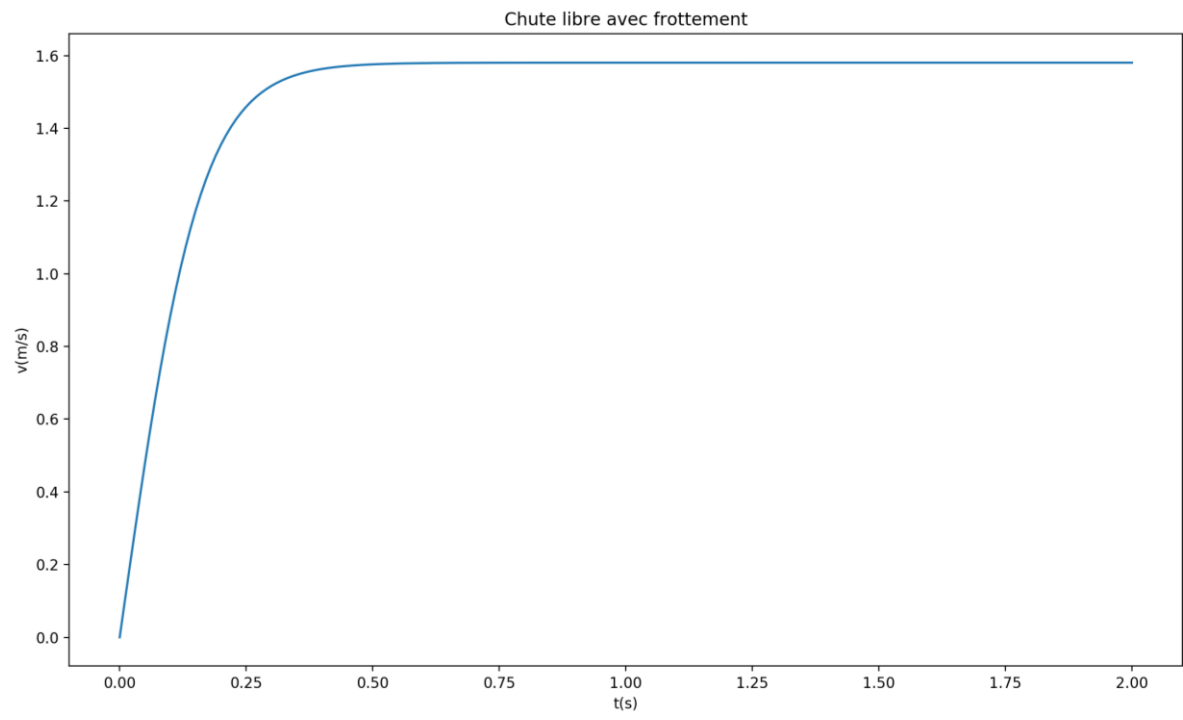
```

### Tracé de la vitesse en fonction du temps

```

59 plt.plot(t,V)
60 plt.xlabel("t(s)")
61 plt.ylabel("v(m/s)")
62 plt.title("Chute libre avec frottement")
63 plt.show()
64

```



## **Les questions à se poser à l'issue de ce chapitre**

### **Vocabulaire**

- *Est-ce que je sais définir / illustrer les termes suivants :*
  - *particule de fluide*
  - *champ eulérien des vitesses*
  - *ligne de courant*
  - *tube de courant*
  - *écoulement stationnaire*
  - *écoulement incompressible*
  - *écoulement unidirectionnel*
  - *écoulement parallèle*
- *Est-ce que je sais faire la distinction entre écoulement laminaire et turbulent ?*
- *Est-ce que je sais à quoi correspond un fluide newtonien ?*
- *Est-ce que je sais à quoi correspond un débit de masse et de volume ?*

### **Bilan de masse**

- *Est-ce que je sais passer d'un système ouvert à un système fermé ?*
- *Est-ce que je sais établir le bilan de masse pour un fluide en écoulement ?*

### **Actions mécaniques dans un fluide en écoulement**

- *Est-ce que je sais à quoi correspond la force de viscosité de cisaillement ?*
- *Est-ce que je sais exprimer le nombre de Reynolds ?*
- *Est-ce que je connais l'expression de la force de trainée dans le cas d'un mouvement de translation uniforme ?*
- *Est-ce que je sais évaluer un nombre de Reynolds et choisir le modèle de la force de trainée ?*
- *Est-ce que je sais lire / compléter / exploiter un script python qui permet de résoudre l'équation différentielle vérifiée par la vitesse ?*