

I. Ecoulement parfait et stationnaire d'un fluide

1. Notion d'écoulement parfait

L'écoulement d'un fluide est dit parfait si les forces de viscosité sont nulles

2. Relation de Bernoulli

La relation de Bernoulli traduit une conservation de l'énergie au cours de l'écoulement :

$$\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2}v^2 \pm gz = cste$$

Conditions de validité :

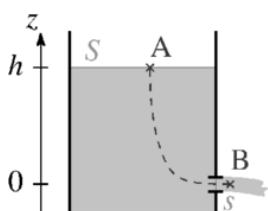
- Ecoulement parfait, stationnaire et incompressible
- Fluide évoluant seulement sous l'action des forces pressantes et du champ de pesanteur uniforme
- Pas de parois mobiles

Remarques :

- La relation de Bernoulli est seulement valable dans un **référentiel galiléen**
- Chacun des termes de la relation de Bernoulli est homogène à une **énergie par unité de masse**.
- La relation de Bernoulli est toujours valable **le long d'une ligne de courant**
- La relation de Bernoulli est valable **en tout point de l'écoulement si celui-ci est irrotationnel** (les particules de fluide ne tournent pas autour de leur centre de masse)
- **Loin de zones de rétrécissement et d'élargissement**, si l'écoulement est parfait, on peut supposer que le **profil de vitesse est uniforme dans une section perpendiculaire à l'écoulement**.

3. Applications

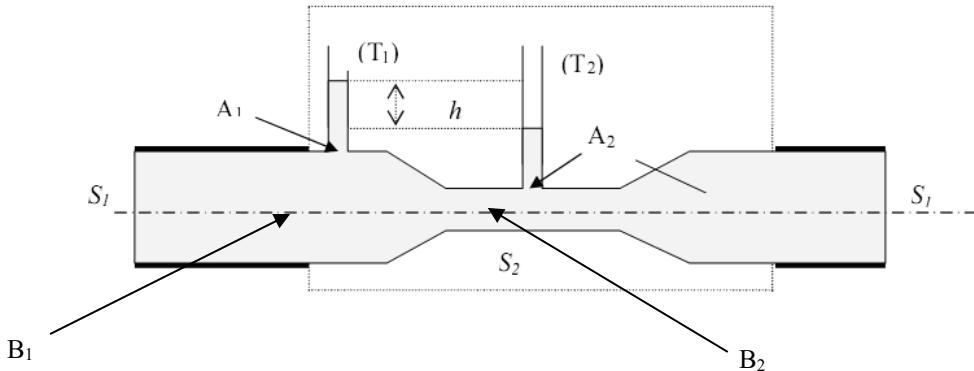
a. Vidange d'un récipient : Formule de Torricelli



Déterminer la vitesse en B en fonction des données de l'énoncé.

b. Tube de Venturi : mesure d'un débit volumique

On insère dans une canalisation de section S_1 un tube dit « de Venturi » de section S_2 . Le fluide s'écoule en régime permanent dans la canalisation est de l'eau, fluide incompressible de masse volumique ρ . On considère que les vitesses sont uniformes dans chaque section droite du tube. L'axe de la canalisation est horizontal et deux tubes verticaux (T_1) et (T_2) jouent le rôle de capteurs de pression. On observe une dénivellation de hauteur h entre les surfaces libres de l'eau des tubes (T_1) et (T_2) ouverts à l'air.



On note P_0 la pression atmosphérique et v_1 la vitesse de l'écoulement en amont du tube de Venturi. A_1 est un point à la base du tube (T_1) et A_2 est un point à la base du tube (T_2).

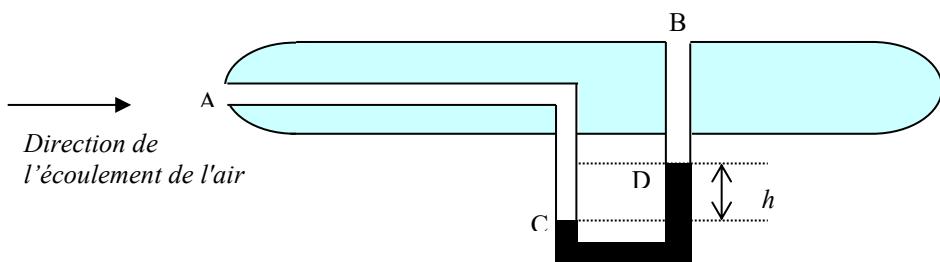
- En faisant l'hypothèse que l'on peut appliquer les lois de la statique des fluides sur les lignes verticales passant par A_1 et B_1 d'une part, et par A_2 et B_2 d'autre part, calculer la différence de pression $P_1 - P_2$ entre les points B_1 et B_2 en fonction de h .
- Exprimer le débit volumique D , en fonction de g , h , S_1 et S_2 .
- Application numérique : $S_1 = 50 \text{ cm}^2$; $S_2 = 30 \text{ cm}^2$; $h = 1,25 \text{ m}$; $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$.
- Citer des applications concrètes de l'effet Venturi.

c. Tube Pitot : mesure d'une vitesse

Les tubes de Pitot sont utilisés en aéronautique pour mesurer la vitesse d'un avion. Ils sont constitués d'un tube très fin placé parallèlement à la direction de l'écoulement de l'air. Les orifices A et B permettent des prises de pressions.

On considère que l'air est un fluide parfait, incompressible et en écoulement stationnaire, et que le dispositif ne perturbe pas l'écoulement. Sur les parties AC et BD, l'air sera considéré comme un fluide statique.

La masse volumique, la vitesse et la pression de l'air loin du tube sont notées respectivement ρ_0 , v_0 et P_0 .



- Représenter l'allure de la ligne de courant C_A qui aboutit en A et l'allure de C_B qui longe le tube en B.
- Déterminer les vitesses v_A en A et v_B en B ainsi que les pressions P_A et P_B . Quel est le nom donné au point A ?
- Dans le manomètre, on mesure une dénivellation h entre les deux niveaux de liquide de masse volumique ρ_1 . En déduire la vitesse d'écoulement v_0 de l'air. A.N. : $h = 24 \text{ cm}$; $\rho_1 = 1,0 \cdot 10^3 \text{ kg.m}^{-3}$.

II. Modèles d'écoulements unidirectionnels de cisaillement, laminaires, parallèles et stationnaires de fluides réels

Rappels :

Quantité de mouvement d'un système matériel :

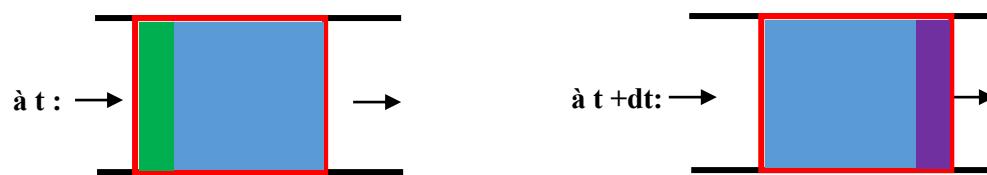
Deuxième loi de Newton :

Cadre d'étude :

- Ecoulement stationnaire
- Ecoulement unidirectionnel
- Ecoulement laminaire
- Ecoulement parallèle de cisaillement
- Ecoulement dans un tube de courant à une seule entrée et une seule sortie

1. Bilan de quantité de mouvement pour un écoulement stationnaire

Système d'étude



$\Sigma^*(t)$: fluide contenu dans $\Sigma(t)$ + élément de fluide de masse δm_e qui va rentrer dans Σ entre t et $t+dt$.

$\Sigma^*(t+dt)$: fluide contenu dans $\Sigma(t+dt)$ + élément de fluide de masse δm_s qui est sortie de Σ entre t et $t+dt$.

Σ : système ouvert

Σ^* : système fermé

Bilan de quantité de mouvement

$\overrightarrow{p * (t)}$ = quantité de mouvement de fluide contenu dans le système fermé à l'instant t :

$\overrightarrow{p * (t + dt)}$ = quantité de mouvement de fluide contenu dans le système fermé à l'instant $t+dt$:

Deuxième loi de Newton pour le fluide contenu dans le système fermé :

Cas d'un écoulement stationnaire :

Cas d'un écoulement stationnaire et incompressible avec des sections d'entrée et de sortie identiques :

2. Ecoulement de Couette plan

a. Description et observation expérimentale

Hypothèses :

- Ecoulement stationnaire

Ecoulement incompressible

Ecoulement laminaire plan, unidirectionnel et parallèle (écoulement lent) : $\vec{v} = v(z)\vec{u}_x$

- **Fluide Newtonien** → la force de viscosité de cisaillement exercée par la couche de fluide supérieure sur une surface dS de la couche inférieure (par rapport à l'axe (Oz)) s'écrit :

$$\overrightarrow{dF_{couche\ supérieure}} = \eta \frac{dv(z)}{dz} dS \vec{e}_x \quad \overrightarrow{dF_{couche\ inférieure}} = -\eta \frac{dv(z)}{dz} dS \vec{e}_x$$

- Pression uniforme : les forces pressantes se compensent
- Effets de la pesanteur négligés
- Le fluide adhère aux parois
- Le plan supérieur se déplace à la vitesse $\vec{V} = V\vec{u}_x$
- Le plan inférieur est de vitesse nulle

b. Profil de vitesse

- Système d'étude

- Bilan de quantité de mouvement

- Profil de vitesse

c. Expression du nombre de Reynolds

3. **Ecoulement de Poiseuille**

a. Description et observation expérimentale

Hypothèses :

- Ecoulement stationnaire

Ecoulement incompressible

Ecoulement laminaire cylindrique, unidirectionnel, parallèle : $\vec{v} = v(r)\vec{u}_x$

- **Fluide Newtonien** → la force de viscosité de cisaillement exercée par la couche de fluide supérieure sur une surface dS de la couche inférieure (par rapport à l'axe (Oz)) s'écrit :

$$\overrightarrow{dF_{couche\ supérieure}} = \eta \frac{dv(r)}{dr} dS$$

- Effets de la pesanteur négligés
- La pression uniforme ne dépend que de x
- Le fluide adhère aux parois

a. Profil de vitesse

- Système d'étude

- Bilan de quantité de mouvement

- Profil de vitesse

b. Loi de Poiseuille

- Généralisation

Loi de Poiseuille :

$$D_V = \frac{\pi \Delta P^*}{8\eta L} R^4 \text{ avec}$$

Pression motrice :

$$P^* = P + \rho g z \quad (\text{axe } z \text{ ascendant})$$

Vitesse moyenne de l'écoulement :

$$v_{moy} = \frac{D_V}{S}$$

Ecoulement horizontal :

$$\Delta P^* = \Delta P = P_e - P_s$$

Ecoulement vertical :

$$\Delta P^* = P_e - P_s + \rho g (z_e - z_s) = \Delta P + \rho g L$$

c. Expression du nombre de Reynolds

d. Résistance hydraulique

Définition :

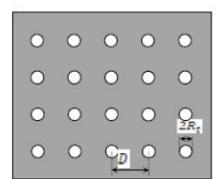
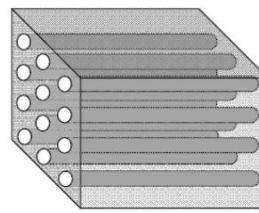
Dans le cas d'un écoulement de poiseuille :

Les résistances hydrauliques s'associent « en série » ou « en dérivation » comme des résistances électriques

III. Écoulement d'un fluide réel à travers un milieu poreux

1. Porosité Φ

- Considérons un milieu poreux, homogène et isotrope :
- On définit la porosité Φ :



où V_p est le volume de l'ensemble des pores et V le volume du milieu poreux.

- Exemple :

Soit un milieu poreux de section S et de profondeur L , contenant n pores cylindriques de rayon a par unité de surface :

2. Loi de Darcy ; perméabilité

- Si l'écoulement à travers chaque pore vérifie la loi de Poiseuille : $d_v =$

A travers l'ensemble des pores, on a :

$$D_v =$$

- **Perméabilité K**

Lien entre la porosité dans le cadre d'un modèle simplifié de capillaires parallèles :

Unité de K par analyse dimensionnelle :

- **LOI DE DARCY :**

Hypothèses :

- Milieu poreux saturé en fluide
- Ecoulement stationnaire, incompressible, laminaire à faible nombre de Reynolds
- Fluide Newtonien

- **Généralisation**

Loi de Darcy :

$$D_V = \frac{K \Delta P^*}{\eta L} S$$

Ecoulement horizontal :

$$\Delta P^* = \Delta P = P_e - P_s$$

Ecoulement vertical :

$$\Delta P^* = P_e - P_s + \rho g (z_e - z_s) = \Delta P + \rho g L \quad (\text{axe } z \text{ ascendant})$$

Les questions à se poser à l'issue de ce chapitre***Ecoulement parfait et stationnaire d'un fluide***

- Est-ce que je sais à quoi correspond un écoulement parfait ?
- Est-ce que je sais exprimer la relation de Bernoulli et citer les conditions de sa validité ?

Ecoulement unidirectionnel de cisaillement, laminaire, parallèle et stationnaire d'un fluide réel

- Est-ce que je sais établir un bilan de quantité de mouvement dans le cas d'un écoulement stationnaire ?
- Est-ce que je sais établir le profil de vitesse pour l'écoulement de Couette plan ?
- Est-ce que je sais déterminer le nombre de Reynolds dans le cas d'un écoulement de Couette plan ?
- Est-ce que je sais établir le profil de vitesse pour l'écoulement de Poiseuille ?
- Est-ce que je sais établir établir la loi de Poiseuille dans le cas d'un écoulement horizontal et citer les conditions de sa validité ?
- Est-ce que je connais la loi de Poiseuille dans le cas général et citer les conditions de sa validité ?
- Est-ce que je sais déterminer le nombre de Reynolds dans le cas d'un écoulement de Poiseuille ?
- Est-ce que je connais l'expression de la résistance hydraulique ?
- Est-ce que je sais exprimer la porosité d'un matériau ?
- Est-ce que je connais la loi de Darcy ainsi que les conditions de sa validité ?
- Est-ce que je sais établir le lien entre porosité et perméabilité dans le cadre d'un modèle simplifié de tubes capillaires parallèles ?