

Correction TD Physique n°8 : Dynamique des fluides

Exercice 1 : Vidange d'un récipient à l'aide d'un siphon

1. Conservation du débit volumique (ES, EI, vitesse uniforme sur une section $\perp$ à l'écoulement) :

$$D_v = v_F S = v_A S_A \Rightarrow v_A = v_F \times \left(\frac{S}{S_A}\right) \ll v_F$$

Relation de Bernoulli (ES, EI, EP, uniquement forces pressantes et de pesanteur) :

$$A \rightarrow F : \frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2} v_A^2 + g z_A = \frac{P_F}{\rho} + \frac{1}{2} v_F^2 + g z_F \quad \text{avec } P_A = P_F = P_0 \quad \text{et} \quad v_A \ll v_F$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v_F^2 = g(z_A - z_F) \Rightarrow v_F = \sqrt{2g(z_A - z_F)} \quad \text{AN : } v_F = 7,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. $D_v = v_F S$ AN : $D_v = 7,9 \times 5 \times 10^{-4} = 4,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 14,3 \text{ m}^3 \cdot \text{h}^{-1}$

3. Relation de Bernoulli : $A \rightarrow C : \frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2} v_A^2 + g z_A = \frac{P_C}{\rho} + \frac{1}{2} v_C^2 + g z_C$ avec $P_A = P_0$, et $v_A \ll v_C = \frac{D_v}{S}$

$$\Rightarrow P_C = P_A - \rho g(z_C - z_A) - \frac{1}{2} \rho \times \left(\frac{D_v}{S}\right)^2 \quad \text{AN : } P_C = 8,7 \times 10^4 \text{ Pa}$$

Le siphon peut fonctionner tant qu'il n'y a pas de bulles de vapeur d'eau en C, donc tant que $P_C > P_{vap}$

Exercice 2 : Vidange d'un réservoir en régime lentement variable

1. Conservation du débit volumique (ES, EI, vitesse uniforme sur une section $\perp$ à l'écoulement) :

$$D_v = v_B S = v_A S \Rightarrow v_A = v_B \times \left(\frac{S}{S_A}\right) \ll v_B$$

Relation de Bernoulli (ES, EI, EP, uniquement forces pressantes et de pesanteur) :

$$A \rightarrow B : \frac{P_A}{\rho} + \frac{1}{2} v_A^2 + g z_A = \frac{P_B}{\rho} + \frac{1}{2} v_B^2 + g z_B \quad \text{avec } P_A = P_B = P_0 \quad \text{et} \quad v_A \ll v_B$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} v_B^2 = g z(t) \Rightarrow v_B = \sqrt{2g z(t)}$$

2. $D_v = v_B S = v_A S = -\frac{dz}{dt} S \Rightarrow v_B = -\frac{S}{S_A} \frac{dz}{dt} \Rightarrow \sqrt{2g z(t)} = -\frac{S}{S_A} \frac{dz}{dt}$
 Séparation de variables : $\frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{S}{S_A} \sqrt{2g} dt \Rightarrow \int_h^z \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{S}{S_A} \sqrt{2g} \int_0^t dt \Rightarrow [2\sqrt{z}]_h^z = -\frac{S}{S_A} \sqrt{2g} \times [t]_0^t$

$$\Rightarrow 2 \times (\sqrt{z} - \sqrt{h}) = -\frac{S}{S_A} \sqrt{2g} t \Rightarrow z(t) = \left(\sqrt{h} - \frac{S \sqrt{g}}{S_A \sqrt{2}} t \right)^2$$

3. $z(t = T) = 0 \Rightarrow \sqrt{h} - \frac{S \sqrt{g}}{S_A \sqrt{2}} T = 0 \Rightarrow \sqrt{h} = \frac{S \sqrt{g}}{S_A \sqrt{2}} T \Rightarrow T = \frac{S}{s} \sqrt{\frac{2h}{g}}$ AN : $T = 800 \text{ s} = 13,3 \text{ min}$

Exercice 3 : Cheminée

1. Relation de Bernoulli (ES, EI, EP, uniquement forces pressantes et de pesanteur) :

$$E \rightarrow S : \frac{P_{sol}}{\mu} + \frac{1}{2} v_{sol}^2 + g z_{sol} = \frac{P(h)}{\mu} + \frac{1}{2} v_S^2 + g h \quad \text{avec} \quad \text{et} \quad v_{sol} = 0 \text{ et } z_{sol} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{P_{sol}}{\mu} = \frac{P(h)}{\mu} + \frac{1}{2} v_S^2 + g h \Rightarrow v_S = \sqrt{2 \times \left(\frac{P_{sol} - P(h)}{\mu} - g h \right)}$$

2. Avec un axe (Oz) ascendant :

$$dP = -\mu_{air} g dz = -\frac{P M_{air}}{RT_0} g dz \Rightarrow \int_{P_{sol}}^{P(z)} \frac{dP}{P} = -\frac{M_{air} g}{RT_0} \int_0^z dz \Rightarrow \ln \left(\frac{P(z)}{P_{sol}} \right) = -\frac{M_{air} g}{RT_0} z \Rightarrow P(z) = P_{sol} e^{-\frac{M_{air} g}{RT_0} z}$$

3. $\Delta P = P_{sol} - P(h) = P_{sol} - P_{sol} e^{-\frac{M_{air} g}{RT_0} h} \Rightarrow \Delta P = P_{sol} \times \left(1 - e^{-\frac{M_{air} g}{RT_0} h} \right)$

$$\text{AN : } \Delta P = 362 \text{ Pa} \quad (P_{sol} = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa})$$

$$M_{gaz} = x_{eau} M_{eau} + x_{CO_2} M_{CO_2} + x_{air} M_{air} \quad \text{AN : } M_{gaz} = 30 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$\mu = \frac{P_{sol} M_{gaz}}{RT_i} \quad \text{AN : } \mu = 0,76 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

La différence de pression étant faible entre le bas et le haut de la cheminée ($\Delta P = 362 \text{ Pa}$), la masse volumique des gaz peut être considérée comme constante dans la cheminée

$$4. \quad v_s = \sqrt{2 \times \left(\frac{P_{sol} - P(h)}{\mu} - gh \right)} \quad \text{AN : } v_s = 19 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

La vitesse réelle est inférieure car l'écoulement des gaz dans la cheminée ne peut être considéré comme parfait.

$$5. \quad D_v = v_s S = v_s \times \left(\pi \left(\frac{D}{2} \right)^2 \right) \Rightarrow D = 2 \sqrt{\frac{D_v}{\pi v_s}} \quad \text{AN : } D = 2 \sqrt{\frac{1,0 \times 10^5 / 3600}{\pi \times 19}} = 1,4 \text{ m}$$

Exercice 4 : Puissance d'une éolienne

- Conservation du débit volumique (conditions de validité : écoulement stationnaire + fluide (écoulement) incompressible) : $D_v = cste = v_{A_1} S = v_{A_2} S \Rightarrow v_{A_1} = v_{A_2} = v = cste$, la vitesse étant considérée uniforme sur la section perpendiculaire à l'écoulement
- En considérant un axe (Oz) ascendant, la relation de Bernoulli devient : $\frac{P}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 + gz = cste$
 En l'appliquant sur la ligne de courant entre A_1 et A'_1 , on obtient : $\frac{P_{A_1}}{\rho} + \frac{1}{2} v_{A_1}^2 + gz_{A_1} = \frac{P_{A'_1}}{\rho} + \frac{1}{2} v_{A'_1}^2 + gz_{A'_1}$
 En l'appliquant sur la ligne de courant entre A_2 et A'_2 , on obtient : $\frac{P_{A_2}}{\rho} + \frac{1}{2} v_{A_2}^2 + gz_{A_2} = \frac{P_{A'_2}}{\rho} + \frac{1}{2} v_{A'_2}^2 + gz_{A'_2}$
 Il n'est pas possible d'écrire la relation de Bernoulli entre les points A'_1 et A'_2 en raison de la présence d'une pièce mobile entre ces deux points (éolienne)
- $\frac{P_{A_1}}{\rho} + \frac{1}{2} v_{A_1}^2 + gz_{A_1} = \frac{P_{A'_1}}{\rho} + \frac{1}{2} v_{A'_1}^2 + gz_{A'_1} \Rightarrow \frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2} v_1^2 = \frac{P'_1}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \quad (z_{A_1} = z_{A'_1})$
 $\Rightarrow P'_1 = P_0 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 - \frac{1}{2} \rho v^2$
 $\frac{P_{A_2}}{\rho} + \frac{1}{2} v_{A_2}^2 + gz_{A_2} = \frac{P_{A'_2}}{\rho} + \frac{1}{2} v_{A'_2}^2 + gz_{A'_2} \Rightarrow \frac{P_0}{\rho} + \frac{1}{2} v_2^2 = \frac{P'_2}{\rho} + \frac{1}{2} v^2 \quad (z_{A_2} = z_{A'_2})$
 $\Rightarrow P'_2 = P_0 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 - \frac{1}{2} \rho v^2$
 $\Rightarrow P'_1 - P'_2 = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2)$
- $\mathcal{P} = Fv = (P'_1 - P'_2) \cdot Sv = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2) Sv$

Exercice 5 : Ecoulement de Couette plan

- Référentiel** : terrestre supposé galiléen

Système : couche de fluide de dimensions $a \times \ell$ comprise entre z et $z + dz$

Forces extérieures : Force de viscosité exercée par la couche supérieure en $z + dz$:

$$\overrightarrow{F_{visc}(z + dz)} = +\eta \left(\frac{dv}{dz} \right)_{z+dz} S \overrightarrow{u_x} = +\eta \left(\frac{dv}{dz} \right)_{z+dz} a \ell \overrightarrow{u_x} \quad (\text{fluide newtonien})$$

Force de viscosité exercée par la couche supérieure en z :

$$\overrightarrow{F_{visc}(z)} = -\eta \left(\frac{dv}{dz} \right)_z S \overrightarrow{u_x} = -\eta \left(\frac{dv}{dz} \right)_z a \ell \overrightarrow{u_x} \quad (\text{fluide newtonien})$$

Force pressante en $x = 0$:

$$\overrightarrow{F_p}(x = 0) = P_e S' \overrightarrow{u_x} = P_e a dz \overrightarrow{u_x}$$

Force pressante en $x = \ell$:

$$\overrightarrow{F_p}(x = \ell) = -P_s S' \overrightarrow{u_x} = -P_s a dz \overrightarrow{u_x}$$

Remarque : le poids est négligé ainsi que les forces pressantes axiales (la pression étant uniforme, elles se compensent)

Bilan de quantité de mouvement en régime stationnaire : $D_m(\overrightarrow{v_s} - \overrightarrow{v_e}) = \overrightarrow{F_{ext}}$

Or $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_e}$, car $\vec{v}$ ne dépend pas de x (écoulement laminaire plan), on obtient donc : $\overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{F_{visc}(z + dz)} + \overrightarrow{F_{visc}(z)} + \overrightarrow{F_p}(x = 0) + \overrightarrow{F_p}(x = \ell) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow +\eta \left(\frac{dv}{dz} \right)_{z+dz} a \ell - \eta \left(\frac{dv}{dz} \right)_z a \ell + P_e a dz - P_s a dz = 0$$

$$\Rightarrow \eta \left[\left(\frac{dv}{dz} \right)_{z+dz} - \left(\frac{dv}{dz} \right)_z \right] a \ell + (P_e - P_s) a dz = 0$$

$$\Rightarrow \eta \ell \left[d \left(\frac{dv}{dz} \right) dz \right] + (P_e - P_s) dz = 0 \Rightarrow \eta \ell \frac{d^2 v}{dz^2} + (P_e - P_s) = 0 \Rightarrow \frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{(P_e - P_s)}{\eta \ell} \Rightarrow \frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{K}{\eta}$$

$$2. \quad \frac{d^2 v}{dz^2} = -\frac{K}{\eta} \Rightarrow \frac{dv}{dz} = -\frac{K}{\eta} z + C \Rightarrow v(z) = -\frac{1}{2} \frac{K}{\eta} z^2 + Cz + D$$

$$\text{CL : } v\left(z = \frac{e}{2}\right) = v\left(z = -\frac{e}{2}\right) = 0 \quad (\text{adhérence aux parois})$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} \frac{K}{\eta} \left(\frac{e}{2}\right)^2 + C \times \frac{e}{2} + D = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} \frac{K}{\eta} \left(\frac{e}{2}\right)^2 - C \times \frac{e}{2} + D = 0$$

$$\text{On en déduit : } -\frac{K}{\eta} \left(\frac{e}{2}\right)^2 + 2D = 0 \Rightarrow D = +\frac{1}{2} \frac{K}{\eta} \left(\frac{e}{2}\right)^2 \quad \text{et} \quad eC = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$\text{Bilan : } v(z) = \frac{K}{2\eta} \left(\left(\frac{e}{2}\right)^2 - z^2 \right)$$

$$3. \quad D_v = \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} v(z) dS = \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} v(z) a dz = \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} \frac{1}{2} \frac{K}{\eta} \left(\left(\frac{e}{2}\right)^2 - z^2 \right) a dz = \frac{1}{2} \frac{K}{\eta} a \int_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} \left(\left(\frac{e}{2}\right)^2 - z^2 \right) dz = \frac{1}{2} \frac{K}{\eta} a \left[\left(\frac{e}{2}\right)^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}}$$

$$\Rightarrow D_v = \frac{1}{2} \frac{K}{\eta} a \left[\left(\frac{e}{2}\right)^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_{-\frac{e}{2}}^{+\frac{e}{2}} = \frac{1}{2} \frac{K}{\eta} a \left[\left(\frac{e}{2}\right)^2 \times \frac{e}{2} - \frac{1}{3} \left(\frac{e}{2}\right)^3 - \left(\left(\frac{e}{2}\right)^2 \times \left(-\frac{e}{2}\right) + \frac{1}{3} \left(-\frac{e}{2}\right)^3 \right) \right]$$

$$\Rightarrow D_v = \frac{1}{2} \frac{K}{\eta} a \frac{4}{3} \left(\frac{e}{2}\right)^3 \Rightarrow D_v = \frac{K}{12\eta} a e^3$$

$$4. \quad D_v = v_{\text{moy}} a e \Rightarrow v_{\text{moy}} = \frac{K}{12\eta} e^2$$

$$5. \quad R_e = \rho \frac{UL_{\perp}}{\eta} = \rho \frac{v_{\text{moy}} e}{\eta} = \rho \frac{\frac{K}{12\eta} e^2 e}{\eta} \Rightarrow R_e = \frac{\rho K e^3}{12\eta^2}$$

AN : $R_e = 200 < R_{ec} = 2000 - 3000$: l'écoulement peut bien être considéré comme laminaire

Exercice 6 : Écoulement de Poiseuille cylindrique

1. **Référentiel** : terrestre supposé galiléen

Système : cylindre de rayon $r < R$ et de longueur L

Forces extérieures : Force de viscosité exercée par la couche supérieure en r : $\vec{f}_v = \eta \frac{dv}{dr} 2\pi r L \vec{u}_x$ (fluide newtonien)

Force pressante en entrée : $\vec{F}_{p,\text{amont}} = \pi r^2 P_e \vec{u}_x$

Force pressante en sortie : $\vec{F}_{p,\text{aval}} = -\pi r^2 P_s \vec{u}_x$

Écoulement stationnaire, incompressible et laminaire cylindrique : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}_{p,\text{amont}} + \vec{F}_{p,\text{aval}} + \vec{f}_v = \vec{0}$

En projection sur l'axe (Ox), le fluide étant newtonien :

$$\pi r^2 P_e - \pi r^2 P_s + \eta \frac{dv}{dr} 2\pi r L = 0 \Rightarrow \eta \frac{dv}{dr} 2\pi r L + \pi r^2 (P_e - P_s) = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dr} = -\frac{\Delta P}{\eta L} \frac{r}{2} \Rightarrow v = -\frac{\Delta P}{\eta L} \frac{r^2}{2} + B$$

La condition d'adhérence est $v(r = R) = 0$, donc : $B = -\frac{\Delta P}{\eta L} \frac{R^2}{4} \Rightarrow v(r) = \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2)$

On obtient bien : $\vec{v}(\mathbf{M}) = \frac{R^2 - r^2}{4\eta} \times \frac{\Delta P}{L} \vec{e}_x$

$$2. \quad Q = \int_0^R v(r) 2\pi r dr = \int_0^R \frac{\Delta P}{4\eta L} (R^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{\Delta P \pi}{2\eta L} \int_0^R (R^2 r - r^3) dr = \frac{\Delta P \pi}{2\eta L} \left[R^2 \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\Delta P \pi}{2\eta L} \frac{R^4}{4}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{\pi \Delta P}{8\eta L} R^4$$

3. Système fermé s'appuyant sur le demi-cylindre de rayon $r < R = 410 \text{ m}$, d'axe de symétrie de révolution (Ox) et de longueur L .

Bilan des forces s'exerçant sur ce système fermé :

- la force de viscosité agissant sur le demi-cylindre extérieur : $\vec{f}_v = \eta \frac{dv}{dr} \pi r L \vec{e}_x$

- le poids du système (moteur de l'écoulement est à considérer) : $\vec{P} = m_g \vec{g} = \rho_g V_g \vec{g} = \rho_g \frac{\pi r^2}{2} L \vec{g}$

Écoulement stationnaire, incompressible et laminaire cylindrique : $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0} \Rightarrow \vec{P} + \vec{f}_v = \vec{0}$

$$\text{Sur (Ox)} : \eta \frac{dv}{dr} \pi r L + \rho_g \frac{\pi r^2}{2} L g \sin \alpha = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dr} = -\frac{\rho_g g \sin \alpha}{2\eta} r \Rightarrow v(r) = -\frac{\rho_g g \sin \alpha}{4\eta} r^2 + A$$

$$\text{Adhérence aux parois} : v(r = R) = 0 \Rightarrow A = \frac{\rho_g g \sin \alpha}{4\eta} R^2 \Rightarrow v(r) = \frac{\rho_g g \sin \alpha}{4\eta} \times (R^2 - r^2)$$

$$4. \quad v(r) = \frac{\rho_g g \sin \alpha}{4\eta} \times (R^2 - r^2) \Rightarrow \frac{dv}{dr} = -\frac{\rho_g g \sin \alpha}{2\eta} r \text{ qui s'annule pour } r = 0$$

$$\text{La vitesse maximale vaut donc : } v_{\max} = v(r = 0) = \frac{\rho_g g \sin \alpha R^2}{4\eta}$$

$$5. \quad v_{\max} = \frac{\rho_g g \sin \alpha R^2}{4\eta} \Rightarrow \eta = \frac{\rho_g g \sin \alpha R^2}{4v_{\max}}$$

$$\text{avec : } v_{\max} = 107 \text{ m} \cdot \text{an}^{-1} = 3,4 \times 10^{-6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} ; R = 410 \text{ m} ; \alpha = 11^\circ ; g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} ; \rho_g = 0,917 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

AN : $\eta = 2,1 \times 10^{13} \text{ Pa} \cdot \text{s}$, ce qui correspond au bon ordre de grandeur de la viscosité dynamique.

$$6. \quad R_e = \frac{U \times L_{\perp}}{\eta} \rho_g \quad \text{avec } U = v_{\text{moy}} \quad \text{et } L_{\perp} = R = 410 \text{ m}$$

$$\text{AN : } R_e = 3,0 \times 10^{-14} < R_{ec} = 2000 - 3000$$

L'écoulement est donc bien laminaire (et même rampant), hypothèse nécessaire pour un écoulement de Poiseuille.

Exercice 7 : Circulation sanguine et résistances hydrauliques

$$1. \quad \text{a. Loi de Poiseuille pour un écoulement horizontal : } D_V = \frac{\pi \Delta P}{8\eta L} R^4 = v_{\text{moy}} S = v_{\text{moy}} \pi R^2 \Rightarrow v_{\text{moy}} = \frac{1}{8\eta} \frac{\Delta P}{L} R^2$$

$$\text{AN : } v_{\text{moy}} = 2,8 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 2,8 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{b. } R_e = \frac{U \times L_{\perp}}{\eta} \rho \Rightarrow R_e = \frac{v_{\text{moy}} \times 2R}{\eta} \rho$$

AN : $R_e = 1,3 \times 10^{-2} < R_{ec} \sim 2000 - 3000$: écoulement laminaire (hypothèse nécessaire pour appliquer la loi de Poiseuille)

$$\text{c. } D_V = v_{\text{moy}} S = v_{\text{moy}} \pi R^2 \Rightarrow D_V = 3,3 \times 10^{-5} \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

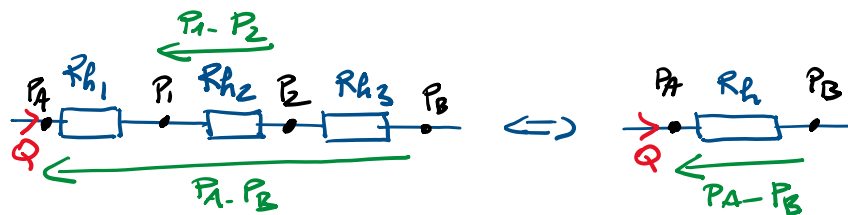
$$\text{Loi de Poiseuille pour un écoulement horizontal : } D_V = \frac{\pi \Delta P}{8\eta L} R^4 \Rightarrow \Delta P = \frac{8\eta L D_V}{\pi R^4} \Rightarrow \text{AN : } \Delta P = 2,3 \times 10^3 \text{ Pa}$$

$$R_e = \frac{v_{\text{moy}} \times 2R}{\eta} \rho \Rightarrow \text{AN : } R_e = 2,4 \times 10^3 : \text{difficile de conclure sur la nature de l'écoulement (donc sur la pertinence d'utiliser la loi de Poiseuille)}$$

$$2. \quad \text{a. } R_h = \frac{\Delta P^*}{D_V} \quad \text{Pour un écoulement horizontal : } R_h = \frac{\Delta P}{D_V} \Rightarrow R_h = \frac{8\eta L}{\pi R^4} \text{ en considérant la loi de Poiseuille valide.}$$

b. Les conditions de la loi de Poiseuille sont respectées donc l'écoulement est stationnaire et incompressible, par conséquent celui-ci ayant une entrée et une sortie, le débit volumique est constant : $Q_A = Q_1 = Q_2 = Q_B = Q$

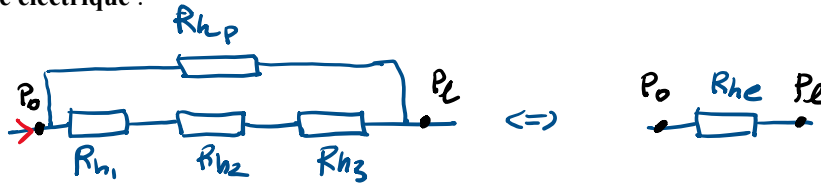
Analogie électrique :



$$\text{Résistance équivalente : les trois tronçons sont associés « en série » : } R_h = R_{h1} + R_{h2} + R_{h3} = \frac{8\eta L_1}{\pi r_1^4} + \frac{8\eta L_2}{\pi r_2^4} + \frac{8\eta(\ell - L_1 - L_2)}{\pi r_3^4}$$

$$\text{Analogie avec un pont diviseur de tension : } P_1 - P_2 = \frac{R_{h2}}{R_{h1} + R_{h2} + R_{h3}} (P_A - P_B)$$

c. Analogie électrique :



$$\text{Résistance équivalente : } \frac{1}{R_{he}} = \frac{1}{R_{hp}} + \frac{1}{R_{h1} + R_{h2} + R_{h3}} \Rightarrow R_{he} = \frac{1}{\frac{1}{R_{hp}} + \frac{1}{R_{h1} + R_{h2} + R_{h3}}}$$

$$\text{Avec } R_{h1} + R_{h2} + R_{h3} = 2 \times \frac{8\eta \left(\frac{\ell}{3}\right)}{\pi r_0^4} + \frac{8\eta \left(\frac{\ell}{3}\right)}{\pi R_0^4} = \frac{8\eta \left(\frac{\ell}{3}\right)}{\pi r_0^4} \times \left(\frac{2}{r_0^4} + \frac{1}{R_0^4}\right) \quad \text{et} \quad R_{hp} = \frac{8\eta \ell}{\pi R_p^4}$$

Exercice 8 : Viscosimètre à écoulement

- Dans le récipient cylindrique de rayon R , le fluide s'écoule très lentement et peut être considéré comme « statique ». La loi de statique des fluides, intégrée entre un point de la surface libre et le point O donne alors : $P(O) = P_0 + \rho gh$
- eVoir cours. Loi de Poiseuille pour un écoulement horizontal : $Q = \frac{\pi}{8\eta} \frac{P(O) - P_0}{L} r^4 = \frac{\pi}{8\eta} \frac{\rho gh}{L} r^4$ appliquée entre le point O et la sortie du tube horizontal $\Rightarrow Q = Ah$ avec $A = \frac{\pi}{8\eta} \frac{\rho g}{L} r^4$
- L'écoulement étant stationnaire : $Q = cst = Q_A$ où A est un point de la surface libre du récipient cylindrique de rayon R .
Or : $Q_A = v_A S_A = v_A \pi R^2$ avec $v_A = -\frac{dh}{dt}$ $\Rightarrow Q = -\frac{dh}{dt} \times \pi R^2$
D'après la loi de Poiseuille, on obtient alors : $Q = \frac{\pi}{8\eta} \frac{\rho gh}{L} r^4 = -\frac{dh}{dt} \times \pi R^2 \Rightarrow \frac{dh}{dt} + \frac{\rho g r^4}{8\eta L R^2} h = 0$
Solution de l'équation différentielle : $h(t) = K \times e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $\tau = \frac{8\eta L R^2}{\rho g r^4}$
CI : $h(t=0) = h_0 \Rightarrow K = h_0 \Rightarrow h(t) = h_0 \times e^{-\frac{t}{\tau}}$
- $h(t=T) = \frac{h_0}{3} = h_0 \times e^{-\frac{T}{\tau}} \Rightarrow \frac{1}{3} = e^{-\frac{T}{\tau}} \Rightarrow -\ln 3 = -\frac{T}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{8\eta L R^2}{\rho g r^4} = \frac{T}{\ln 3} \Rightarrow \eta = \frac{T \rho g r^4}{\ln 3 \times 8 L R^2}$
AN : $\eta = 2,0 \times 10^{-4} \text{ Pl}$

Exercice 9 : Perméamètre

- $\Phi = \frac{V_{pores}}{V_{total}} = \frac{N_{pores} AL}{SL} = \frac{nSAL}{SL} = nA$
- En appliquant la loi de Poiseuille pour un écoulement vertical pour chaque pore cylindrique :
 $Q = N_{pores} q = nS q = nS q = nS \frac{\pi}{8\eta} \frac{\Delta P + \rho g L}{L} r^4 \Rightarrow Q = \frac{n\pi r^4}{8\eta} \left(\frac{\Delta P}{L} + \rho g\right) S \Rightarrow k = \frac{n\pi r^4}{8}$
On retrouve ici la loi de Darcy pour un écoulement vertical
- L'écoulement étant lent, on peut appliquer la loi de statique des fluides sur la colonne d'eau de hauteur h : $P(0) = P_0 + \rho gh$
Et $P(-L) = P_0 \Rightarrow \Delta P = P(0) - P(-L) = \rho gh$
- L'écoulement étant stationnaire : $Q = cst = Q_A$ où A est un point de la surface libre.
Or : $Q_A = v_A S$ avec $v_A = -\frac{dh}{dt}$ $\Rightarrow Q = -\frac{dh}{dt} \times S$
En utilisant la loi de Darcy : $Q = \frac{n\pi r^4}{8\eta} \left(\frac{\Delta P}{L} + \rho g\right) S = \frac{n\pi r^4}{8\eta} \left(\frac{\rho gh}{L} + \rho g\right) S = \frac{n\pi r^4 \rho g}{8\eta} \left(1 + \frac{h}{L}\right) S$
 $\Rightarrow -\frac{dh}{dt} \times S = \frac{n\pi r^4 \rho g}{8\eta} \left(1 + \frac{h}{L}\right) S \Rightarrow \frac{dh}{dt} + \frac{n\pi r^4 \rho g}{8\eta L} h = -\frac{n\pi r^4 \rho g}{8\eta}$ $\frac{1}{\tau} = \frac{n\pi r^4 \rho g}{8\eta L} = \frac{k\rho g}{\eta L} \Rightarrow \tau = \frac{\eta L}{k\rho g}$
 $h(t) = C \times e^{-\frac{t}{\tau}} - L$
CI : $h(t=0) = h_0 \Rightarrow C = h_0 + L \Rightarrow h(t) = (h_0 + L) \times e^{-\frac{t}{\tau}} - L$ $\lim_{t \rightarrow +\infty} h = -L$: le sable est complètement asséché
- $h(t_0) = 0 = (h_0 + L) \times e^{-\frac{t_0}{\tau}} - L \Rightarrow e^{-\frac{t_0}{\tau}} = \frac{L}{h_0 + L} \Rightarrow -\frac{t_0}{\tau} = \ln\left(\frac{L}{h_0 + L}\right) = -\ln\left(\frac{h_0 + L}{L}\right) = -\ln\left(1 + \frac{h_0}{L}\right)$
 $\Rightarrow \tau = \frac{t_0}{\ln\left(1 + \frac{h_0}{L}\right)}$ AN : $\tau = 204 \text{ s}$ et $k = \frac{\eta L}{\rho g \tau}$ AN : $k = 4,2 \times 10^{-6} \text{ m}^2 = 4,2 \mu\text{m}^2$

Exercice 10 : Vidange d'un bassin par un siphon

1. Relation de Bernoulli + conservation du débit volumique entre A et C : $D_C = v_C s_1 = \sqrt{2gh_1} \times s_1$

l'A.N. donne : $D_C = \sqrt{2 \times 9,81 \times 3} \times \pi \times \left(\frac{0,10}{2}\right)^2 = 0,060 \text{ m}^3 \cdot \text{s}^{-1} = 60 \text{ L/s}$

2. $D = D_C \Leftrightarrow \sqrt{2gz_m} \times s_1 = D \Leftrightarrow \sqrt{2gz_m} \times \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2 = D \Leftrightarrow z_m = \frac{8D}{\pi^2 g d^4}$; l'A.N. donne : $z_m = 0,74 \text{ m}$.

3. Si $z > z_m = 0,74 \text{ m}$, alors $D_c > D$, z (t) « oscille » : le niveau du bassin baisse, et le siphon se désarmorce dès que $z = d$. Le bassin se remplit alors grâce au débit d'eau entrant jusqu'à atteindre une hauteur h_1 , hauteur pour laquelle le siphon se réarmorce, etc...

Si $z < z_m = 0,74 \text{ m}$, alors $D_c < D$, z (t) augmente : le bassin se remplit et $D_C = \sqrt{2gz} \times s_1$ augmente. Une fois que $D_C = D$, un régime stationnaire est atteint et z reste constant.

Ici le fond du bassin est à une altitude de $h_0 = 1,0 \text{ m}$, par conséquent on se trouve toujours dans le cas où $z > z_m$.

4. En considérant le régime lentement variable (quasi-permanent) et en appliquant la relation de Bernoulli sur la ligne de courant A $\rightarrow$ C, on obtient : $\frac{1}{2}v_A^2 + \frac{P_A}{\rho} + gz_A = \frac{1}{2}v_C^2 + \frac{P_C}{\rho} + gz_C$. Or $P_C = P_A = P_0$ et $v_A \ll v_C$, car la surface du bassin est très grande. Par conséquent : $v_C = \sqrt{2gz}$ (Formule de Torricelli).

Si on s'intéresse à une variation dz du niveau de la surface libre, entre les instants t et $t + dt$: en effectuant un bilan de volume au niveau de la surface libre, donner la relation existant entre S , dz , D , D_C et dt : $Sdz = (D - D_C)dt$.

On obtient alors : $Sdz = Ddt - D_C dt \Leftrightarrow Sdz = Ddt - v_C s_1 dt = Ddt - \sqrt{2gz} s_1 dt \Leftrightarrow S \frac{dz}{dt} = D - \sqrt{2gz} \times s_1$.

Cette équation différentielle s'écrit aussi : $\frac{S}{D} \frac{dz}{dt} = 1 - \frac{\sqrt{2gz} \times s_1}{D} \Leftrightarrow \frac{S}{D} \frac{dz}{dt} = \frac{\sqrt{2g} \times s_1}{D} \left(\frac{D}{\sqrt{2g} \times s_1} - \sqrt{z} \right)$

Au final : $\frac{dz}{\frac{D}{\sqrt{2g} \times s_1} - \sqrt{z}} = \frac{\sqrt{2g} \times s_1}{S} dt$. Par conséquent, $a = \frac{D}{\sqrt{2g} \times s_1}$; $b = \frac{\sqrt{2g} \times s_1}{S}$

5. En intégrant l'équation déterminée à la question précédente :

$$\int_{h_1}^d \frac{dz}{a - \sqrt{z}} = - \int_{h_1}^d \frac{dz}{\sqrt{z} - a} = \int_0^{t_1} b dt \Leftrightarrow -(2\sqrt{d} + 2a \ln(\sqrt{d} - a) - 2\sqrt{h_1} - 2a \ln(\sqrt{h_1} - a)) = bt_1$$

On obtient : $t_1 = \frac{2(\sqrt{h_1} - \sqrt{d}) + 2a \ln\left(\frac{\sqrt{h_1} - a}{\sqrt{d} - a}\right)}{b}$; A.N. : $t_1 = 820 \text{ s}$

6. Entre les temps t_1 et t_2 , le bassin se remplit à partir uniquement du débit en entrée : $Dt_2 = S(h_1 - d)$; A.N. : $t_2 = 670 \text{ s}$

7. $T = t_1 + t_2$; A.N. : $T = 24 \text{ min } 50 \text{ s}$.

8. D'après la relation de Bernoulli (en considérant le régime lentement variable (quasi-permanent)) écrite entre E et C, on obtient :

$$\frac{1}{2}v_E^2 + \frac{P_E}{\rho} + gz_E = \frac{1}{2}v_C^2 + \frac{P_C}{\rho} + gz_C \Leftrightarrow \frac{1}{2}v_E^2 + \frac{P_E}{\rho} + gH = \frac{1}{2}v_C^2 + \frac{P_0}{\rho} \text{ et : } v_C = \sqrt{2gz}; v_E = \frac{s_1}{s_2} v_C = \frac{s_1}{s_2} \sqrt{2gz}$$

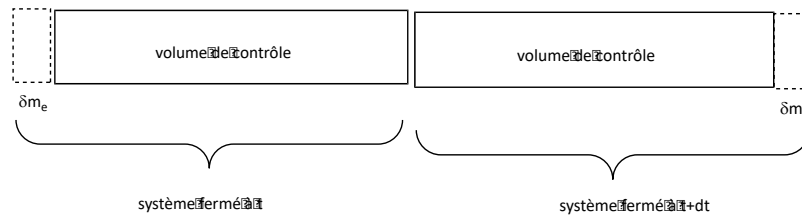
On obtient alors : $P_E = \rho g z \left(1 - \left(\frac{s_1}{s_2} \right)^2 \right) + P_0 - \rho g H$

$$P_E > 0 \Leftrightarrow \rho g z \left(1 - \left(\frac{s_1}{s_2} \right)^2 \right) + P_0 - \rho g H > 0 \Leftrightarrow H < z \left(1 - \left(\frac{s_1}{s_2} \right)^2 \right) + \frac{P_0}{\rho g}$$

La valeur minimale de z étant h_0 (en réalité d), alors : $H < h_0 \left(1 - \left(\frac{s_1}{s_2} \right)^2 \right) + \frac{P_0}{\rho g}$; A.N. : $6,83 \text{ m}$.

Exercice 11 : Ecoulement dans un vaisseau sanguin

1. Le volume de contrôle (cylindre de rayon r et longueur L) est un système ouvert.



Le système décrit dans l'énoncé est fermé. On suit l'évolution de ce système fermé entre t et $t+dt$.

De plus, en régime stationnaire, on a :

- $\delta m_e = \delta m_s = \delta m$
- $\vec{p}_{SO}(t+dt) = \vec{p}_{SO}(t)$

Bilan de quantité de mouvement du système fermé SF :

$$\vec{p}_{SF}(t+dt) = \vec{p}_{SO}(t+dt) + \delta m \vec{v}_s \quad (1)$$

$$\vec{p}_{SF}(t) = \vec{p}_{SO}(t) + \delta m \vec{v}_e \quad (2)$$

$$(2)-(1) : d\vec{p}_{SF} = \vec{p}_{SF}(t+dt) - \vec{p}_{SF}(t) = \delta m (\vec{v}_s - \vec{v}_e)$$

$$\text{Ainsi : } \frac{d\vec{p}_{SF}}{dt} = \frac{\delta m}{dt} (\vec{v}_s - \vec{v}_e)$$

$$\text{On applique le PFD au système fermé : } \frac{d\vec{p}_{SF}}{dt} = \sum_{ext} \vec{F} = D_m (\vec{v}_s - \vec{v}_e)$$

Enfin, le profil des vitesses est identique en entrée et en sortie car indépendant de x : $\sum_{ext} \vec{F} = \vec{0}$

2. BDF sur le système fermé :

- Poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- Force pressante en $x = 0$: $\vec{F}_{p,e} = \pi r^2 P(x=0) \vec{u}_x$
- Force pressante en $x = L$: $\vec{F}_{p,s} = -\pi r^2 P(x=L) \vec{u}_x$
- Force de viscosité : $\vec{F}_{visc} = 2\pi r L \eta_s \frac{dv(r)}{dr} \vec{u}_x$

$$\text{PDF : } \vec{P} + \vec{F}_{p,e} + \vec{F}_{p,s} + \vec{F}_{visc} = \vec{0}$$

$$\text{Projection sur (Ox) : } \pi r^2 P(x=0) - \pi r^2 P(x=L) + 2\pi r L \eta_s \frac{dv(r)}{dr} = 0$$

$$\frac{dv(r)}{dr} = -\frac{\Delta P}{2L\eta_s} r$$

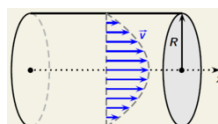
$$v(r) = -\frac{\Delta P}{4L\eta_s} r^2 + C$$

$$\text{Conditions aux limites : } v(R) = 0 \text{ donc } C = \frac{\Delta P R^2}{4L\eta_s}$$

$$v(r) = -\frac{\Delta P}{4L\eta_s} (R^2 - r^2)$$

$$\vec{v} = \frac{\Delta P}{4\eta_s L} \left(\frac{d^2}{4} - r^2 \right) \vec{u}_x$$

Le champ des vitesses est **parabolique** :



3. Débit de volume :

$$D_v = \iint \vec{v} \cdot \vec{dS} = \int v_x(r) \cdot \vec{u}_x \cdot 2\pi r dr \cdot \vec{u}_x$$

$$D_v = \int \frac{\Delta P}{4L\eta_S} (R^2 - r^2) 2\pi r dr = \frac{\Delta P \pi}{2L\eta_S} \int_0^{\frac{d}{2}} R^2 r dr - \frac{\Delta P \pi}{2L\eta_S} \int_0^{\frac{d}{2}} r^3 dr$$

$$D_v = \frac{\Delta P \pi}{2L\eta_S} \left[\frac{R^2 r^2}{2} \right]_0^{\frac{d}{2}} - \frac{\Delta P \pi}{2L\eta_S} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^{\frac{d}{2}}$$

$$D_v = \frac{\Delta P \pi}{4L\eta_S} \left(\frac{d}{2} \right)^4 - \frac{\Delta P \pi}{8L\eta_S} \left(\frac{d}{2} \right)^4 = \frac{\Delta P \pi}{128 L \eta_S} d^4$$

4. $\Delta P = R_h D_v$ donc $R_h = \frac{128 \eta_S L}{\pi d^4}$

5. Pour un fluide réel : $D_{va} = v_{moy,a} v_a = v_{moy,a} \pi \left(\frac{d_a}{2} \right)^2$

AN : $D_{va} = 2,61 \times 10^{-1} \pi \left(\frac{20 \times 10^{-3}}{2} \right)^2 = 8,3 \times 10^{-5} m^3 \cdot s^{-1}$

Ce qui correspond à un débit de 5 L·min⁻¹ (cohérent avec le cours de SVT et l'information qui arrive après)

6. $D_{va} = N \cdot D_{v art} = N v_{moy,art} \pi \left(\frac{d_{art}}{2} \right)^2$

AN : $N = \frac{8,3 \times 10^{-5}}{2,8 \times 10^{-2} \pi (0,025 \times 10^{-3})^2} = 1,5 \times 10^6$

7. $D_{v art} = \frac{\Delta P_{art} \pi}{128 L_{art} \eta_S} d_{art}^4 = \frac{D_{va}}{N}$

Ainsi : $\Delta P_{art} = \frac{128 L_{art} \eta_S D_{va}}{N \pi d_{art}^4}$

AN : $\Delta P_{art} = \frac{128 \times 10 \times 10^{-3} \times 1,6 \times 10^{-3} \times 8,3 \times 10^{-5}}{1,5 \times 10^6 \times \pi \times (0,05 \times 10^{-3})^4} = 5,8 \times 10^3 Pa$

D'après la partie A : 760 mmHg = 1,013 bar = 1,013 x 10⁵ Pa donc 1 Pa = 0,0075 mmHg

Ainsi $\Delta P_{art} = 43 mmHg$

D'après la table 1 : $\Delta P_{art} = 86 - 30 mmHg = 56 mmHg$, ce qui est le même ordre de grandeur. Il y a un bon accord avec le modèle et les valeurs expérimentales.

8. Nombre de Reynolds dans les artérioles : $R_{e,art} = \frac{v_{moy,art} \cdot d_{art} \cdot \rho_S}{\eta_S}$

AN : $R_{e,art} = \frac{v_{moy,art} \cdot d_{art} \cdot \rho_S}{\eta_S} = \frac{2,8 \times 10^{-2} \times 0,05 \times 10^{-3} \times 1,06 \times 10^3}{1,6 \times 10^{-3}} = 0,92$

L'écoulement est laminaire, voire rampant.