Etude d'une pompe à chaleur

1. Pompe à chaleur : l'énergie de la source froide est prélevée pour être transmise à la source chaude : $\boldsymbol{W} > 0$, $\boldsymbol{Q_f} > 0$, $\boldsymbol{Q_c} < 0$

2. L'application du second principe sur tout le cycle donne : $\Delta S = S_c + S_e = 0$
Comme toutes les transformations sont réversibles : $S_c = 0$
Il vient : $\frac{Q_F}{T_F} + \frac{Q_C}{T_C} = 0$ donc $Q_F = -Q_C \cdot \frac{T_F}{T_C}$
Comme $T_C > T_F$ alors $|\boldsymbol{Q_f}| < |\boldsymbol{Q_c}|$.

3. L'application du premier principe sur tout le cycle donne : $\Delta U = W + Q_f + Q_c = 0$

$$e_{cc} = \frac{-Q_c}{W} = \frac{-Q_c}{-Q_c - Q_F} = \frac{1}{1 + \frac{Q_F}{Q_c}} = \frac{1}{1 - \frac{T_F}{T_C}} = \frac{T_C}{T_C - T_F}$$

AN : $e_{cc} = \frac{26+273}{26} = 11{,}5$

4. L'application du premier principe sur tout le cycle donne : $\Delta U = W + Q_f + Q_c = 0$

$$e_{cf} = \frac{Q_F}{W} = \frac{Q_F}{-Q_c - Q_F} = \frac{1}{-1 - \frac{Q_c}{Q_F}} = \frac{1}{-1 + \frac{T_C}{T_F}} = \frac{T_F}{T_C - T_F}$$

AN : $e_{cc} = \frac{273}{26} = 10{,}5$

5. En régime stationnaire :
- $\delta m_e = \delta m_s = \delta m$
- Énergie du système ouvert : $E_{SO}(t) = E_{SO}(t + dt)$

Bilan d'énergie sur le système fermé (SF) :

$$dE_{SF} = E_{SF}(t+dt) - E_{SF}(t) = E_{SO} + \delta m \cdot e_s - E_{SO} - \delta m \cdot e_e$$

$$dE_{SF} = \delta m \, (e_s - e_e)$$

$$dE_{SF} = \delta m \cdot (u_s + \frac{1}{2}{v_s}^2 + gz_s - u_e - \frac{1}{2}{v_e}^2 - gz_e)$$

Premier principe appliqué au système fermé (Σ) :

$$\delta W_p + \delta W_u + \delta Q = \delta m \cdot (u_s + \frac{1}{2}{v_s}^2 + gz_s - u_e - \frac{1}{2}{v_e}^2 - gz_e)$$

$$\frac{P_e}{\rho_e}\delta m - \frac{P_s}{\rho_s}\delta m + w_u \delta m + q\delta m = \delta m \cdot (u_s + \frac{1}{2}{v_s}^2 + gz_s - u_e - \frac{1}{2}{v_e}^2 - gz_e)$$

$$w_u + q = h_s + \frac{1}{2}{v_s}^2 + gz_s - h_e - \frac{1}{2}{v_e}^2 - gz_e$$

En négligeant les variations d'énergie cinétique et potentielle massiques Il vient :

$$\Delta h = h_s - h_e = w_u + q$$

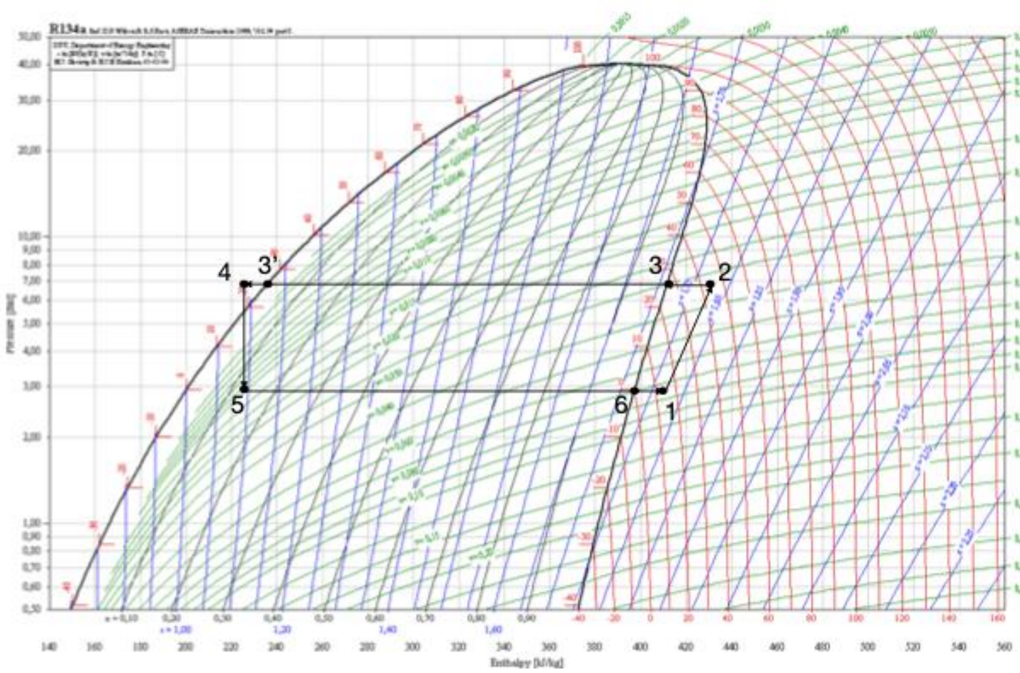
6. On applique le premier principe industriel au détendeur (pas de pièce mobile $w_u = 0$, détendeur calorifugé $q = 0$) : $\Delta h = 0$. Cette détente est **isenthalpique**.

7. Dans le second principe, $\Delta S = 0$ implique une transformation **réversible** ($S_c = 0$) et **adiabatique** ($S_e = 0$). On attend donc un **déplacement très lent d'un piston calorifugé**. L'application du premier principe industriel donne :

$$\Delta h = w_{12} = 22 \; kJ \cdot kg^{-1}$$

8. Un changement d'état est isobare isotherme donc **isotherme horizontale**.

9. Document réponse



10. $r = \frac{puissance\ utile}{puissance\ fournie} = \frac{D_m w_{12}}{P}$

AN : $r = \frac{2{,}21 \times 10^{-3} \times 22 \times 10^{3}}{100} = 0{,}43$

11. $e_c = \frac{-q_{24}}{w_{12}}$

L'application du premier principe industriel pour l'étape 2 à 4 donne :

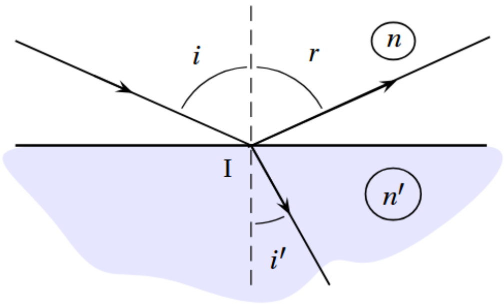
$$\Delta h_{24} = h_4 - h_2 = q_{24} + w_{24} = q_{24}$$

$$e_c = \frac{h_2 - h_4}{w_{12}}$$

AN : $e_c = \frac{430-226}{22}$= 9,3 (plus faible de l'efficacité de Carnot)

D. Déviation de la lumière dans une goutte d'eau

44. On s'intéresse à un rayon incident en I sur un dioptre séparant les milieux d'indice n et n'.
Le plan d'incidence est défini par ce rayon incident et la normale au dioptre en I. L'angle d'incidence entre ces deux droites est noté i. Tous les angles sont définis arithmétiquement, comme le propose l'énoncé.



D'après les lois de Snell-Descartes :

- le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont dans le plan d'incidence
- l'angle entre la normale et le rayon réfléchi est $r = i$
- l'angle entre la normale et le rayon réfracté est tel que :

$$n \sin i = n' \sin i'$$

---

45. Dans l'eau, l'indice dépend de la longueur d'onde (il est en général décroissant lorsque λ augmente). D'après la relation ci-dessus, l'angle de réfraction varie avec λ, ce qui conduit à une séparation des différentes couleurs de la lumière blanche incidente : c'est la **dispersion** des rayons lumineux.

---

46. D'après la loi de la réflexion :

$$\alpha_1 = \alpha_2 \qquad \text{et} \qquad \alpha_3 = \alpha_4$$

D'après la géométrie de la figure, et le caractère isocèle de tous les triangles de sommet O :

$$r = \alpha_1 \,;\, \alpha_2 = \alpha_3 \text{ et } \alpha_4 = \alpha_5$$

D'où finalement :

$$\boxed{\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = r}$$

Par ailleurs, d'après la loi de la réfraction :

$$\sin i = n \sin r \qquad \text{et} \qquad \sin \alpha_6 = n \sin \alpha_5 = n \sin r$$

d'où :

$$\boxed{\alpha_6 = i}$$

---

47. Pour obtenir D, on additionne les déviations successives du rayon par rapport à sa direction incidente :

$$D = [i - r] + [\pi - \alpha_2 - \alpha_1] + [\pi - \alpha_3 - \alpha_4] + [\alpha_6 - \alpha_5]$$

d'où, en utilisant les égalités établies à la question précédente :

$$D = i - r + \pi - r - r + \pi - r - r + i - r$$

ce qui donne bien :

$$\boxed{D = 2\pi + 2i - 6r}$$

---

48. Pour que le rayon réfléchi soit perpendiculaire au rayon incident, il faut que :

$$D = \frac{\pi}{2} \qquad \text{ou} \qquad D = \frac{3\pi}{2}$$

La déviation minimale étant égale à 241°, seule la seconde valeur peut être atteinte. On cherche donc i_p tel que :

$$\frac{3\pi}{2} = 2\pi + 2i_p - 6r_p$$

soit :

$$\frac{\pi}{4} + i_p - 3r_p = 0$$

avec :

$$\sin i_p = n \sin r_p$$

d'où :

$$\frac{\pi}{4} + i_p - 3\arcsin\left(\frac{1}{n}\sin i_p\right) = 0$$

Pour déterminer i_p, on peut donc chercher la valeur de x qui annule la fonction :

$$\boxed{f(x) = \frac{\pi}{4} + x - 3\arcsin\left(\frac{1}{n}\sin x\right)}$$

La ligne du script définissant $f(x)$ doit donc être écrite de la manière suivante :

```
return Pi/4+x-3*np.arcsin((np.sin(x))/1.3317)
```

Transpiration

1. Système : tranche d'aire S comprise entre les altitudes z et $z + \mathrm{d}z$
Bilan de particules : $dN = N(t+dt) - N(t) = \delta N_{entrant} - \delta N_{sortant} = \delta N(z) - \delta N(z+dz)$
En régime stationnaire, $dN = 0 \Longrightarrow \delta N(z) = \delta N(z+dz) \Longrightarrow E(z)dt = E(z+dz)dt$
$\Longrightarrow E(z) = E(z+dz) \Longrightarrow E = cst \Longrightarrow \frac{\mathbf{dn}}{\mathbf{dz}} = \boldsymbol{cst}$ **et indépendant donc de z.**

2. $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z} = cst = a \Longrightarrow n(z) = az + b$

Conditions aux limites : $n(z=0) = \boldsymbol{b} = \boldsymbol{n_{sat}}$
et $n(z=\delta) = a\delta + b = n_e \Longrightarrow \boldsymbol{a} = \frac{n_e - b}{\delta} = \frac{\boldsymbol{n_e - n_{sat}}}{\boldsymbol{\delta}}$

$\Longrightarrow \boldsymbol{n(z)} = \frac{\boldsymbol{n_e - n_{sat}}}{\boldsymbol{\delta}} \boldsymbol{z} + \boldsymbol{n_{sat}}$ **et** $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{-DS}\frac{\mathbf{dn}}{\mathbf{dz}} = \boldsymbol{-DS}\frac{\boldsymbol{n_e - n_{sat}}}{\boldsymbol{\delta}}$

3. Equation d'état des gaz parfaits : $P_e = \frac{n_e}{\mathcal{N}_A} RT_0 \Longrightarrow \boldsymbol{n_e} = \frac{\boldsymbol{P_e \mathcal{N}_A}}{\boldsymbol{RT_0}}$ (n_e s'exprime en $particules \cdot m^{-3}$)

4. $\boldsymbol{E} = -DS\frac{n_e - n_{sat}}{\delta} = -DS\frac{\frac{P_e \mathcal{N}_A}{RT_0} - \frac{P_{sat}\mathcal{N}_A}{RT_0}}{\delta} = -\frac{\boldsymbol{D\mathcal{N}_A S}}{\boldsymbol{\delta RT_0}}(\boldsymbol{P}_{\mathbf{e}} - \boldsymbol{P}_{\mathbf{sat}})$

5. $\boldsymbol{e} = \frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{\mathcal{N}_A}} \times \boldsymbol{M_e}$ (E s'exprime en $particules \cdot s^{-1}$)

6. **masse volumique de l'eau :** $\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{e}} = 1{,}0 \times 10^3\ \boldsymbol{kg \cdot m^{-3}}$

surface d'une feuille de chêne : $\boldsymbol{S} = 5 \times 5 = 25\ \boldsymbol{cm}^2 = 25 \times 10^{-4}\ \boldsymbol{m}^2$

volume d'eau qui s'évapore par jour :
$\boldsymbol{V}_{\mathbf{e}} = \frac{\boldsymbol{e}}{\boldsymbol{\rho}_{\mathbf{e}}} \times 24 \times 3600 = \frac{\boldsymbol{EM_e}}{\boldsymbol{\mathcal{N}_A \rho_e}} \times 24 \times 3600 = \frac{-\frac{\boldsymbol{D\mathcal{N}_A S_{tot}}}{\boldsymbol{\delta RT_0}}(\boldsymbol{P}_{\mathbf{e}} - \boldsymbol{P}_{\mathbf{sat}})\boldsymbol{M_e}}{\boldsymbol{\mathcal{N}_A \rho_e}} \times 24 \times 3600$

AN :$\boldsymbol{V}_{\mathbf{e}} = \frac{-\frac{0{,}3\times10^{-4}\times6{,}02\times10^{23}\times100000\times25\times10^{-4}}{2\times10^{-3}\times8{,}314\times298}\times(0{,}75\times2{,}3\times10^3 - 2{,}3\times10^3)\times18\times10^{-3}}{6{,}02\times10^{23}\times1{,}0\times10^3} \times 24 \times 3600 = 1{,}4\ \boldsymbol{m}^3 = 1{,}4 \times 10^3\ \boldsymbol{L}$

Cette valeur paraît correspondre à la réalité ?

Consommation de nutriments par une bactérie

1. Flux particulaire : $\phi_{part} = -DS\frac{dn^*}{dr}$
2. $= -DS\frac{dc}{dr}$ dans le sens des r croissants
3. $\phi_0 = +\,4\pi r^2 D\frac{dc}{dr}$ dans le sens des r décroissants à travers une surface sphérique S = $4\pi r^2$
4. Soit une coquille sphérique entre r et r+dr
   Bilan de particule : $dN = N(t+dt) - N(t) = \delta N_{entrant} - \delta N_{sortant} = \delta N(r+dr) - \delta N(r)$
   En régime stationnaire, $dN = 0 \Longrightarrow \delta N(r) = \delta N(r+dr)$
   $\Longrightarrow \phi_{part}(r)dt = \phi_{part}(r+dr)dt$
   $\Longrightarrow \phi_0(r) = \phi_0(r+dr) = \phi_0$

En particulier, à la surface (r = R) : $\phi_0(R) = \frac{4}{3}\pi R^3 A$

5. $\phi_0 = +\,4\pi r^2 D\frac{dc}{dr}$ = constante. On sépare les variables :

$$dc = \frac{\phi_0}{4\pi D}\frac{dr}{r^2}$$
$$c(r) = -\frac{\phi_0}{4\pi D r} + B$$

Conditions aux limites : $r \to \infty$ alors $c = c_\infty$. Ainsi B = c_∞
Il vient :

$$c(r) = c_\infty - \frac{\phi_0}{4\pi D r}$$

6. La bactérie peut se nourrir si, en surface $c(r) > 0$
Il vient :

$$c_\infty > \frac{\phi_0}{4\pi D R}$$
$$c_\infty > \frac{AR^2}{3D}$$
$$\frac{3Dc_\infty}{R^2} > A$$

L'activité maximale est $A^* = \frac{3Dc_\infty}{R^2}$

7. $c_\infty = \frac{A^* R^2}{3D}$
AN : avec D = 10^{-5} cm$^2\cdot$ s^{-1} = 10^{-9} m$^2\cdot$s^{-1}
c_∞ = 3.10^{-3} mol·m^{-3}

8. **Entre r_2 et l'infini : diffusion**

$$c(r) = B' - \frac{\phi_0}{4\pi D r}$$

Condition aux limites : $r \to \infty$ alors $c = c_\infty$. Ainsi B' = c_∞

$$c(r) = c_\infty - \frac{\phi_0}{4\pi D r}$$

Entre r_1 et r_2 : concentration uniforme

$$c(r) = c_0 = c_\infty - \frac{\phi_0}{4\pi D r_2}$$ par continuité

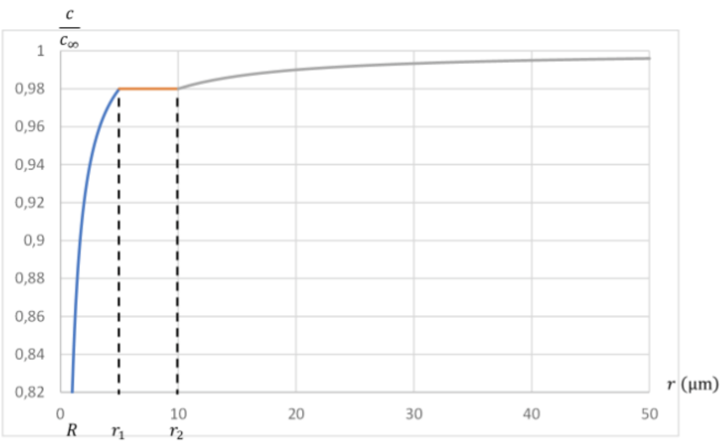
Entre R et r_1 : diffusion :

$$c(r) = B'' - \frac{\phi_0}{4\pi D r}$$

Condition aux limites : $r = r_1$ alors $c = c_0 = c_\infty - \frac{\phi_0}{4\pi D r_2}$ Ainsi B'' = $c_\infty + \frac{\phi_0}{4\pi D}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$
Ainsi :

$$c(r) = c_\infty + \frac{\phi_0}{4\pi D}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) - \frac{\phi_0}{4\pi D r}$$

Soit l'allure suivante :



9. La concentration à la surface de la bactérie est :

$$c(R) = c_\infty + \frac{\phi_0}{4\pi D}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) - \frac{\phi_0}{4\pi D R}$$

Elle est positive si $\phi_0 < \frac{4\pi D R c_\infty}{1+\frac{R}{r_2}-\frac{R}{r_1}}$. On en déduit ${A_1}^* = \frac{A^*}{1-\frac{R(r_2-r_1)}{r_1 r_2}}$

On constate que ${A_1}^* > A^*$