Etude d'une pompe à chaleur

Une pompe à chaleur est une machine thermique particulièrement intéressante en raison de son efficacité supérieure à 1. Il s'agit d'une machine thermique comportant deux sources de chaleur (chaude et froide) entre lesquelles un fluide caloporteur subit des cycles de transformation. Le fluide utilisé est le HFC référencé R134a, il est sans danger pour la couche d'ozone. Nous considérerons dans un premier temps le système fermé constitué du fluide caloporteur. Nous verrons ensuite l'écoulement du fluide dans les différents organes qui composent la pompe à chaleur.

I. Etude thermodynamique du système fermé

Dans cette sous partie, on modélise la pompe à chaleur par une machine cyclique réversible ditherme de Carnot : au cours du cycle, le fluide R134a reçoit le transfert thermique Q_f de la part de la source froide (à la température T_f), le transfert thermique Q_c de la part de la source chaude (température T_c) et le travail W de la part du compresseur. On suppose que toutes les évolutions sont réversibles.

1. Donner, en justifiant, les signes des grandeurs Q_c, Q_f et W.

2. Comparer $|Q_f|$ et $|Q_c|$.

3. En supposant que la pompe à chaleur est utilisée comme chauffage, exprimer l'efficacité e_{cc} de cette machine. Application numérique avec $\theta_c = 26°C$ et $\theta_f = 0°C$.

4. En supposant que la pompe à chaleur est utilisée comme climatiseur, exprimer l'efficacité e_{fc} de cette machine. Application numérique avec $\theta_c = 26°C$ et $\theta_f = 0°C$.

II. Etude thermodynamique de l'écoulement stationnaire

En régime d'écoulement stationnaire, le fluide R134a subit les transformations suivantes (figure 1) :

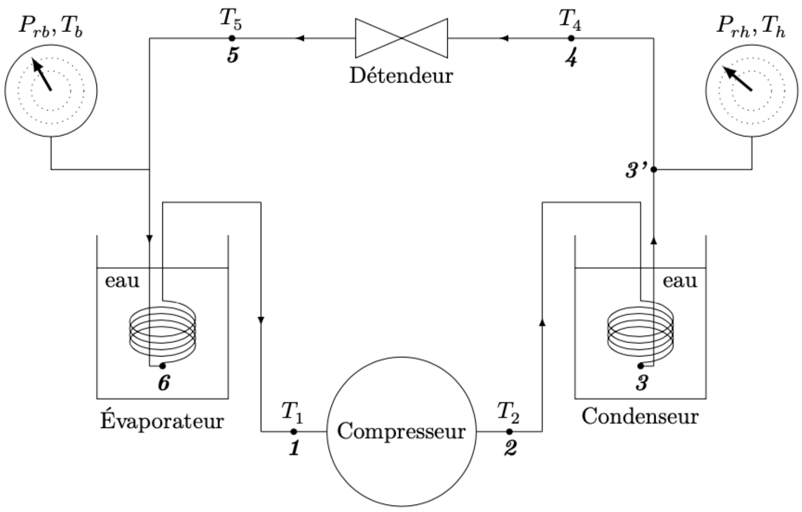


Figure 1 – schéma de la pompe à chaleur en régime stationnaire

- **1 à 2** : le fluide à l'état gazeux sous la pression P_{rb} est comprimé dans un compresseur à piston. Il ressort à la pression P_{rh}. On considère que cette compression est adiabatique réversible.
- **2 à 3** : le gaz se refroidit de façon isobare jusqu'au condenseur. On parle de désurchauffe. Au point 3, le gaz est assimilé à de la vapeur saturante sèche.
- **3 à 3'** : le gaz se condense au contact thermique de l'eau du condenseur jusqu'au liquide saturé.
- **3' à 4** : le liquide se refroidit de façon isobare jusqu'au détendeur. On parle de sous-refroidissement.
- **4 à 5** : le liquide subit une détente dans le détendeur. Il commence à se vaporiser. La pression de sortie est P_{rb}. Cette détente peut être considérée comme adiabatique.
- **5 à 6** : le fluide poursuit sa vaporisation à la pression P_{rb} au niveau des serpentins.
- **6 à 1** : le gaz se réchauffe de façon isobare jusqu'à l'entrée du compresseur.

Le débit massique est $D_m = 2{,}21 \times 10^{-3} kg \cdot s^{-1}$.

On obtient le tableau 1 :

	1	**2**	**3**	**3'**	**4**	**5**	**6**
P (bar)	2,9	6,8	6,8	6,8	6,8	2,9	2,9
θ (°C)	12	44	26	26	19	0	0
T (K)	285	317	299	299	292	273	273
x	vapeur sèche	vapeur sèche	1	0	Liquide	x_5	1
v ($\mathrm{m^3{\cdot}kg^{-1}}$)	0,073	0,033	0,030	$8{,}3 \times 10^{-4}$	$8{,}1 \times 10^{-4}$	0,012	0,070
h ($\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$)	408	430	412	233	226	h_5	396
s ($\mathrm{kJ{\cdot}K^{-1}{\cdot}kg^{-1}}$)	1,76	s_2	1,72	1,13	1,09	1,08	1,72

Tableau 1

5. On considère un organe de machine présentant une entrée et une sortie dans lequel le fluide est en écoulement stationnaire. En négligeant les variations d'énergie cinétique et potentielle, établir le premier principe industriel sous la forme : $\Delta h = w_u + q$ avec :

Δh variation d'enthalpie massique du fluide
w_u travail utile massique reçu par le fluide
q transfert thermique massique reçu par le fluide

6. On s'intéresse au détendeur (étape **4 à 5**). Il s'agit d'un organe sans pièce mobile. Justifier que cette étape soit isenthalpique.

7. On s'intéresse au compresseur (étape **1 à 2**). Donner des arguments pouvant justifier l'isentropicité de la transformation **1 à 2**. Calculer le travail massique utile w_{12} reçu par le fluide de la part du compresseur. Commenter.

On considère le diagramme enthalpique fourni sur le document réponse. Sur ce diagramme, on peut identifier la courbe de saturation composée de la courbe d'ébullition (liquide saturé, x = 0, courbe de gauche) et la courbe de rosée (vapeur saturante sèche, x = 1, courbe de droite). On peut également identifier les isotitres, les isothermes et les isentropiques.

8. Commenter l'allure des isothermes dans l'état diphasé.

9. Placer les points 1, 2, 3, 3', 4, 5 et 6 sur le diagramme enthalpique et tracer le cycle parcouru par le fluide sur le document réponse à détacher et rendre avec la copie.

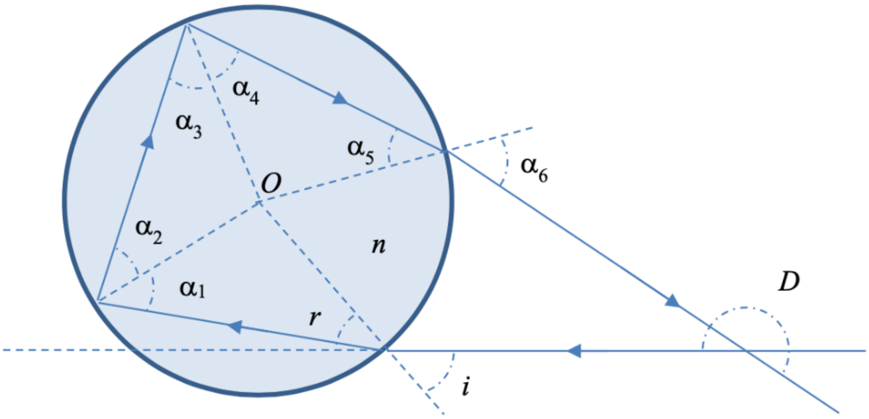
10. Le wattmètre mesurant la puissance électrique consommée par le compresseur affiche une valeur moyenne de 110 W. Déterminer le rendement du compresseur. Commenter.

11. La pompe à chaleur est utilisée comme chauffage l'hiver. Définir puis calculer l'efficacité de e_c de la pompe à chaleur en tenant compte de la désurchauffe et du sous-refroidissement mais dans tenir compte du rendement r du compresseur. Comparer à l'efficacité de Carnot e_{cc}.

Déviation de la lumière dans une goutte d'eau

On cherche à calculer la déviation D d'un rayon lumineux provoquée par deux réflexions à l'intérieur d'une goutte d'eau (voir schéma ci-dessous). L'angle D est l'angle entre le rayon sortant et le rayon entrant dans la goutte. On constate une dispersion des rayons de la lumière blanche à l'intérieur de la goutte d'eau.

1. Rappeler les lois de Descartes de la réflexion et de la réfraction. On notera i l'angle d'incidence et l'angle de réfraction (angles comptés positivement et non algébriques). On illustrera le propos par des schémas annotés.



2. Préciser en quoi consiste la dispersion des rayons lumineux.
3. Exprimer les angles α_j (j = 1 à 6 sur le schéma de la goutte) en fonction de i et de r.
4. Montrer que l'angle de déviation D s'écrit : $D = 2\pi + 2i - 6r$.
5. On se propose de déterminer numériquement la valeur de l'angle d'incidence i_P telle que les rayons incidents et réfléchis par la goutte soient perpendiculaires. On constate par ailleurs que le minimum de déviation vaut D_{min} = 241°. On utilise un programme Python utilisant la fonction fsolve. Compléter ce programme en donnant l'expression de la fonction f retenue, écrite en langage python. On prendra n_r = 1,3317, l'indice de réfraction de l'eau pour une lumière rouge.

<u>Données</u>

► La fonction fsolve du module scipy.optimize permet la résolution d'une équation de la forme f(x) = 0. Elle nécessite l'importation du module correspondant. La fonction f doit être définie au préalable et la valeur initiale x_0 de l'algorithme doit être précisée (valeur initiale à partir de laquelle le module recherche le zéro de la fonction). Syntaxe à utiliser :

```
import scipy.optimize as op
op.fsolve(f,x0)
```

► np.arcsin(x) donne en radians la valeurs de l'angle x, compris entre -π/2 et π/2, dont on connaît le sinus.
► math.degrees(a) donne la valeur de l'angle a en degrés à partir de sa valeur en radians.

<u>Programme python à compléter</u>

```
import scipy.optimize as op
import numpy as np
import math
Pi = math.pi
def f(x) :
        return À COMPLÉTER
x0 = 0
zero = op.fsolve(f,x0)
iP = math.degrees(zero)
print("La valeur de iP recherchée en degrés proche de ",x0," est ",iP ,"")
```

L'exécution du programme donne :
La valeur de iP recherchée en degrés, proche de 0, est 38.39

Transpiration

Des échanges gazeux s'effectuent par les stomates, les pores de la feuille. En particulier, lorsque l'air ambiant n'est pas saturé en vapeur d'eau, l'eau de la sève brute s'évapore, provoquant ainsi l'ascension de la sève dans les canaux du xylème. Ce mécanisme participe aussi au refroidissement de la feuille.

Lorsque la feuille est soumise à un courant d'air du fait de la convection naturelle ou forcée, il existe au voisinage de la surface de la feuille une fine couche d'air d'épaisseur δ appelée couche limite dans laquelle l'écoulement de l'air est laminaire. Les échanges de particules entre l'air « loin » de la feuille et l'air en contact avec la feuille ne se font donc que par diffusion. L'épaisseur de la couche limite dépend de nombreux paramètres. Dans des conditions raisonnables, elle est de l'ordre de quelques millimètres : on prendra δ = 2,0 mm pour les applications numériques.

Loin de la feuille, c'est-à-dire pour $z > \delta$, la pression partielle P_e en eau et la densité volumique n_e de molécules d'eau dans l'air sont supposées uniformes. On suppose aussi qu'à la surface de la feuille, l'air est saturé en eau : en $z = 0$, la pression partielle en eau vaut P_{sat} et la densité volumique de molécules d'eau n_{sat} (Fig. 3). On considère ici que la température de la feuille est suffisamment proche de celle de son environnement, de sorte que $T = T_0$.

Dans toute la suite, on suppose que seule la surface supérieure de la feuille présente des stomates, ce qui est le cas chez de nombreuses espèces. On ne considèrera donc que cette face de la feuille dans le mécanisme de transpiration.

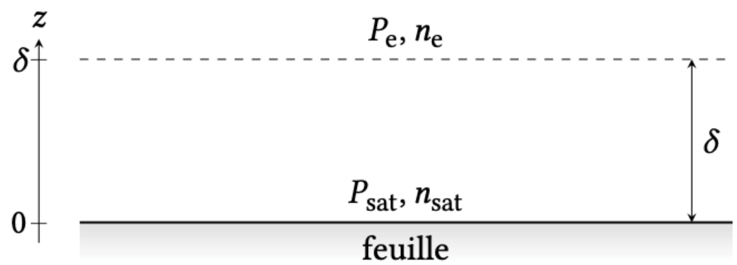


Figure 3 – Couche limite au voisinage de la surface de la feuille.

On appelle E le flux de particules, orienté dans le sens des z croissants sur une surface d'aire S. Dans ce cas, la loi de Fick permet d'écrire : $E = -DS\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}$, où $n(z)$ est la densité volumique de particules d'eau dans l'air à une distance z de la feuille et D le coefficient de diffusion.

1. En régime permanent, à l'aide d'un bilan de particules entre les altitudes z et $z + \mathrm{d}z$, montrer que $\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}z}$ ne dépend pas de z.
2. Représenter graphiquement l'évolution de $n(z)$ pour $n \in [0;2\delta]$. En déduire l'expression de E dans la couche limite en fonction de D, n_e, n_{sat}, S et δ.
3. En supposant que la vapeur d'eau dans l'air se comporte comme un gaz parfait, exprimer n_e en fonction de P_e, $\mathcal{N}_A$, R et T_0.
4. En déduire que le flux de particules d'eau s'écrit
$$E = -\frac{D\mathcal{N}_A S}{\delta R T_0}(P_e - P_{sat})$$
5. Exprimer la masse e d'eau qui s'évapore par unité de temps en fonction de E, $\mathcal{N}_A$ et de la masse molaire de l'eau M_e.
6. Rappeler la valeur de la masse volumique de l'eau liquide et proposer une estimation raisonnable pour la surface S d'une feuille de chêne. Toujours dans le cas où $T \approx T_0$, en déduire une estimation de l'ordre de grandeur du volume d'eau qui s'évapore, chaque jour, d'un chêne mature dont le feuillage comporte environ 100 000 feuilles. On supposera que l'humidité relative P_e/P_{sat} de l'air est de l'ordre de 75 %. Commenter.

Consommation de nutriments par une bactérie

Pour assurer son métabolisme, une bactérie a besoin de consommer en permanence des nutriments. Leur absorption se produit à travers des pores membranaires, répartis à la surface. Dans le cas d'une bactérie immobile, la collection de nutriments se fait donc par diffusion depuis le milieu environnant jusqu'à la surface. Dans ce problème, nous allons modéliser ce processus afin de définir une taille maximale au-delà de laquelle une bactérie immobile ne peut plus subvenir à ses besoins. On suppose qu'un régime stationnaire est établi.

Données :
Coefficient de diffusion du glucose dans l'eau : D = 10^{-5} $cm^2 \cdot s^{-1}$

Partie A : loi de Fick

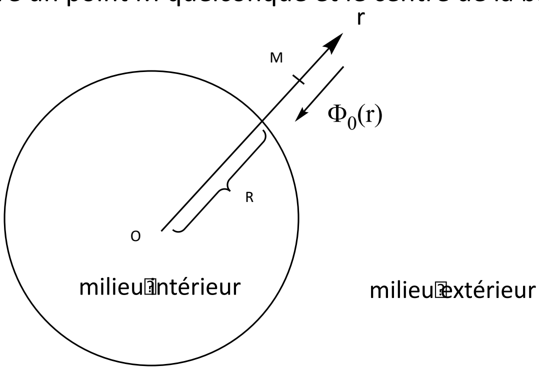
Considérons un milieu dans lequel la densité particulaire n^* ne dépend que d'une coordonnée d'espace notée r.

1. On note D le coefficient de diffusion et $\phi_{part}(r)$ le flux particulaire [s^{-1}] à travers une surface S dans le sens des r croissants. Énoncer la loi de Fick.

2. On note $\phi_0(\mathrm{r})$ le flux molaire [mol· s^{-1}]. Relier $\phi_0(\mathrm{r})$ à la concentration en quantité de matière des particules $c(r)$.

Partie B : collecte de nutriments à la surface

Nous assimilerons la bactérie à une sphère de rayon R et de centre O. L'axe (O,r) est le repère d'espace choisi en symétrie sphérique : la distance entre un point M quelconque et le centre de la bactérie est alors notée OM = r.



Nous supposons que la bactérie absorbe des nutriments à sa surface. Dans le milieu extérieur, les nutriments migrent de façon diffusive, avec un coefficient de diffusion D. Nous appelons $c(r)$. [mol·m^{-3}] la concentration en nutriments au point M et notons c_∞ la concentration des nutriments loin de la bactérie.

La collecte de nutriments par la bactérie peut se quantifier par un flux molaire $\phi_0(\mathrm{r})$ [mol · s^{-1}], compté positivement, correspondant à la quantité de matière de nutriments **entrant** par unité de temps dans une sphère de rayon r centrée sur la bactérie. Nous insistons sur ce choix de convention, commode dans la situation considérée mais inhabituel.

3. Exprimer $\phi_0(\mathrm{r})$ en fonction de D, r et $c(r)$ dans le choix de convention proposé.

Au niveau de la surface de la bactérie, le flux $\phi_0(\mathrm{R})$ est déterminé de sorte que la quantité de matière entrante permette d'assurer l'activité métabolique, caractérisée par la quantité de matière de nutriments consommée par unité de temps et de volume de la bactérie A [mol · s^{-1} · m^{-3}].

4. Montrer qu'en régime stationnaire et en l'absence de source interne, $\phi_0(\mathrm{r})$ est égal à une constante notée ϕ_0 . Relier le flux de nutriment collecté par la bactérie ϕ_0 à sa consommation A et à son rayon R.

5. En déduire le profil de concentration en nutriments $c(r)$ en fonction de c_∞, ϕ_0, D et r.

6. Montrer qu'une bactérie de rayon R donné ne peut pas collecter plus qu'une certaine quantité de nutriments par unité de temps et de volume de la bactérie, définissant ainsi une consommation maximale A* dont l'expression en fonction de c_∞, D et R est à déterminer.

L'activité métabolique d'Escherichia Coli est d'environ 10 mol de glucose par m^3 et par seconde.

7. Estimer la concentration c_∞ minimale en glucose pour une bactérie d'Escherichia Coli de 1 μm puisse survivre.

Partie C : homogénéisation du milieu par les flagelles

Une analyse plus précise de la surface de la membrane d'une bactérie fait apparaître des flagelles mobiles, de longueur typique ℓ_f = 10 μm. Un rôle envisageable pour les flagelles serait d'assurer un mélange de la solution de nutriments au voisinage de la bactérie. Dans cette partie, nous allons chercher à caractériser cet effet.

Nous supposons que les flagelles génèrent un écoulement de fluide de vitesse typique v_{mel} autour de la bactérie. Nous considérons un modèle simplifié, dans lequel l'écoulement assure que dans une région $r_1 \leq r \leq r_2$, la concentration en nutriments est uniforme égale à c_0 ($c_0 \leq c_\infty$), alors qu'ailleurs, sa répartition est contrôlée par la diffusion seulement. La distance r_1 correspond à une couche limite diffusive au voisinage de la surface de la bactérie tandis que r_2 est de l'ordre de la longueur des flagelles ℓ_f. Dans toute cette partie à nouveau, nous considérons que le régime stationnaire est établi.

8. Déterminer le nouveau profil de concentration en nutriments $c(r)$ dans la région de l'espace $r \geq R$ en fonction de r, des paramètres géométriques r_1 et r_2, ainsi que de ϕ_0, c_∞ et D. Représenter graphiquement le profil de concentration obtenu. On distinguera trois zones.

9. Déterminer la nouvelle consommation maximale A_1* pour une bactérie de taille R en fonction de A*, R, r_1 et r_2. Comparer A_1* et A*.