Barre d'acier

Question simple

Un bloc de métal, porté à la température T_1, est mis dans une pièce maintenue à la température $T_0 < T_1$.

1. Enoncer la loi de Newton pour le flux thermique conducto-convectif
2. Etablir l'équation différentielle vérifier par la température $T(t)$ du bloc de métal.
3. Résoudre l'équation différentielle.

Question ouverte

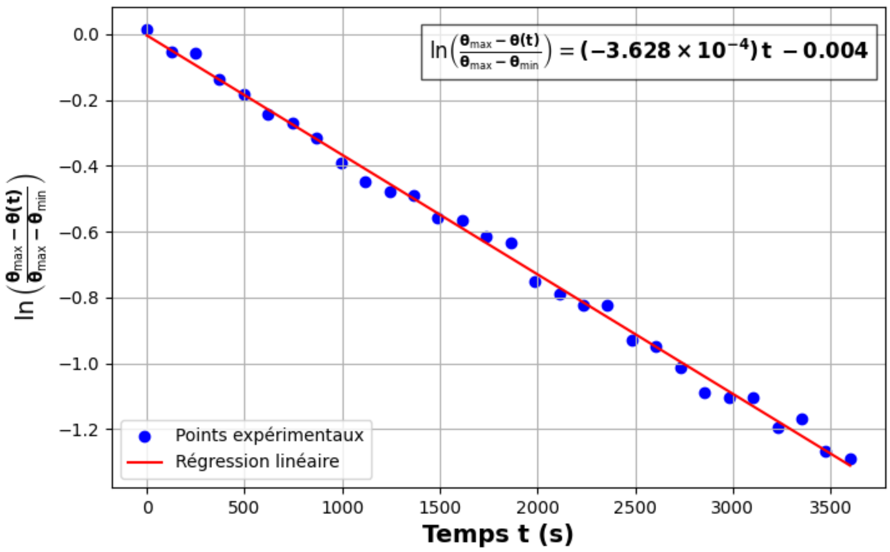
Dans le cadre d'une activité expérimentale, on propose aux élèves de mesurer le flux au travers d'une barre cylindrique en acier (de longueur L et de rayon R), en la plaçant dans un calorimètre contenant de l'eau glacée.

Les barres d'acier sont conservées dans une remise à $\theta_{min} = 9{,}5\ °C$. Les températures des salles de classe est égale à $\theta_{max} = 18\ °C$.

Les barres d'acier utilisées lors de cette activité sont munies de 6 capteurs de température

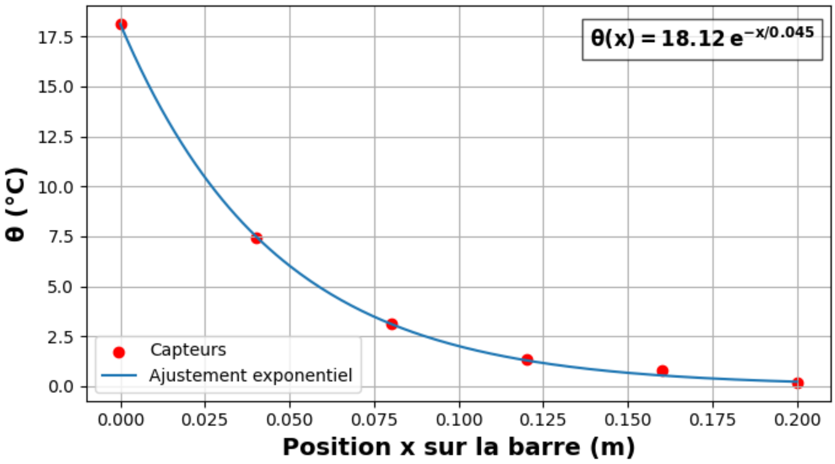
En préparation de cette activité expérimentale, deux expériences sont réalisées en amont.

1) Dans un premier temps, on se demande combien de temps avant l'activité doit-on sortir les barres d'acier de la remise pour qu'elles soient toutes à la température de la salle de classe ? Pour répondre à cette question, on mesure la température $\theta(t)$ en °C de la barre au cours du temps. On remarque que celle-ci est constante le long de la barre. Ces mesures nous permettent de tracer le graphique suivant :



<u>Proposer un modèle et un raisonnement permettant d'estimer au bout de combien de temps on peut considérer que la barre est à la température de la salle.</u>

2) Dans une seconde expérience, on se demande s'il est possible de ne pas avoir à changer le mélange eau – glace dans les calorimètres entre les deux groupes participant à cette activité expérimentale ? Pour répondre à cette question, on utilise un calorimètre dans lequel on a versé de l'eau glacée, constituée de $m_{eau} = 400\ g$ et $m_{glace} = 400\ g$. Après équilibre, la température relevée dans le bain et aussi dans l'air du calorimètre est de $\theta_{calo} \approx \theta_{bain} = 0°C$. On place la barre d'acier dans le calorimètre de manière à ce qu'elle touche dans sa partie inférieure l'eau glacée. La partie supérieure de la barre est en dehors du calorimètre. On relève la température θ en °C en différents points de la barre.



<u>Proposer un modèle permettant d'estimer la masse de glace fondue pendant l'utilisation d'une barre sur deux heures d'activité, puis conclure s'il est nécessaire ou non de changer le mélange eau–glace entre deux groupes.</u>

3) **<u>Proposer un modèle pour retrouver l'équation vérifiée par $\theta(x)$ écrite sur le graphe de la question précédente</u>**

Document : Données

Masse volumique de l'acier : $\rho = 7850\ kg \cdot m^{-3}$

Capacité thermique massique de l'acier : $c = 0{,}450\ J \cdot g^{-1} \cdot K^{-1}$

Conductivité thermique de l'acier : $\lambda = 50\ W \cdot K^{-1} \cdot m^{-1}$

Caractéristiques géométriques de la barre d'acier : cylindre de longueur : $L = 20{,}0\ cm$ et de rayon : $R = 1{,}0\ cm$

Enthalpie de fusion massique de la glace : $\ell_{fus} = 333\ kJ \cdot kg^{-1}$

Coefficient d'échange convectif acier – air dans le calorimètre $h = 150\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}$

Barre d'acier : correction

Question simple

1. Loi de Newton :
le flux thermique conducto-convectif entre un fluide en contact avec un solide s'écrit :
$\Phi_{solide \to fluide} = hS \times \left(T_{solide} - T_{fluide}\right)$

2. Système : bloc de métal

1er principe : $dU = \delta W + \delta Q = \delta Q$

avec :

$\delta W = \delta W_P = -P_{ext}dV = 0$ car $dV = 0$

$\delta Q = \delta Q_{\text{pièce}\to\text{bloc de métal}} = hS \times (T_0 - T)dt < 0$: le bloc de métal cède de la chaleur à l'extérieur moins chaud

$dU = CdT$

Bilan : $CdT = hS \times (T_0 - T)dt$ $\Rightarrow \boldsymbol{\frac{dT}{dt} + \frac{hS}{C}T = \frac{hS}{C}T_0}$

3. $T(t) = A \times exp\left(-\frac{\boldsymbol{hS}}{C}t\right) + T_0$
Condition initiale : $T(t = 0) = T_1 \Rightarrow T_1 = A + T_0 \Rightarrow A = T_1 - T_0$
$\Rightarrow \boldsymbol{T(t) = (T_1 - T_0) \times exp\left(-\frac{hS}{C}t\right) + T_0 \Rightarrow T(t) - T_0 = (T_1 - T_0) \times exp\left(-\frac{hS}{C}t\right)}$

Question ouverte

1. Voir question simple :

$\Rightarrow \theta(t) - \theta_{max} = (\theta_{min} - \theta_{max}) \times exp\left(-\frac{hSt}{C}\right)$

$\Rightarrow ln\left(\frac{\theta_{max} - \theta(t)}{\theta_{max} - \theta_{min}}\right) = -\frac{hSt}{C} = -\frac{1}{\tau}t$

A partir du graphique on en déduit : $\frac{1}{\tau} = 3{,}628 \times 10^{-4} s^{-1} \Rightarrow \tau = 2{,}756 \times 10^3\ s\ \approx 45{,}9\ min$

Selon ce modèle, au bout de $\boldsymbol{\Delta t} = 5\boldsymbol{\tau} \approx 3{,}8\ \boldsymbol{h}$, la température de la barre peut être considérée comme égale à celle de la salle.

Remarque 1 : on observe que les points expérimentaux s'alignent bien suivant la droite modèle et sont répartis aléatoirement autour de celle-ci, on peut donc considérer que ces mesures sont en adéquation avec le modèle proposé au moins sur le temps d'étude soit 1h.

Remarque 2 : les données nous permettent de calcul le coefficient d'échange convectif de l'acier avec l'air dans la salle :

$$\frac{hS}{C} = 3{,}628 \times 10^{-4} \Rightarrow h = \frac{3{,}628 \times 10^{-4}C}{S} = \frac{3{,}628 \times 10^{-4} \times m \times c}{2\pi RL + 2\pi R^2} = \frac{3{,}628 \times 10^{-4} \times \rho \times \pi R^2 L \times c}{2\pi RL + 2\pi R^2}$$

AN : $\boldsymbol{h} = 5{,}8\ \boldsymbol{W \cdot m^{-2} \cdot K^{-1}}$ (ce qui est un bon ordre de grandeur de coefficient d'échange entre un métal et l'air statique)

2. Loi de Fourier : $\Phi_{th} = -\lambda S \frac{dT}{dx} = -\lambda \pi R^2 \frac{d\theta}{dx} = -\lambda \pi R^2 \times \left(-\frac{1}{0{,}041} \times 18{,}12 \times e^{-\frac{x}{0{,}041}}\right)$
$\Longrightarrow \Phi_{th} = \lambda \pi R^2 \times \frac{18{,}12}{0{,}041} \times e^{-\frac{x}{0{,}041}}$
Pour répondre à la question posée, le flux thermique transmis par la barre d'acier au contact de l'eau glacé, est alors celui en $x = 0{,}20\ m$: $\Phi_{glace} = \lambda \pi R^2 \times \frac{18{,}12}{0{,}041} \times e^{-\frac{0{,}20}{0{,}041}}$ AN : $\Phi_{glace} = 5{,}3 \times 10^{-2}\ W$

Enthalpie massique de fusion de la glace : $\ell_{fus} = 333\ kJ \cdot kg^{-1}$

On en déduit la masse de glace par seconde qui peut être fondue à cause du flux provenant de la barre d'acier (en supposant l'absence de pertes d'énergie) :

$m_{glace} = \frac{\Phi_{glace}}{\ell_{fus}}$ AN : $m_{glace} = \frac{5{,}3 \times 10^{-2}}{333 \times 10^3} = 1{,}6 \times 10^{-7}\ kg \cdot s^{-1} = 1{,}6 \times 10^{-4}\ g \cdot s^{-1}$

Sur un temps de $\boldsymbol{\Delta t} = 4\boldsymbol{h}$ (temps approximatif de deux séances d'activités expérimentales), la masse de glace fondue est :

$m_{glace}^{tot} = m_{glace} \times \Delta t$ AN : $\boldsymbol{m_{glace}^{tot}} = 1{,}6 \times 10^{-4} \times 4 \times 3600 = 2{,}3\ \boldsymbol{g}$ **selon ce modèle, donc largement en-dessous de la masse initiale de glace ; il n'est donc pas nécessaire de changer le bain d'eau glacée entre deux groupes.**

3. Système : tranche de la barre d'acier comprise entre x et x+dx, étudiée entre les instants t et t + dt

Bilan d'énergie ($P_{ext} = cste$) : $dH = \delta Q_{cond}(x) - \delta Q_{cond}(x + dx) - \delta Q_{conv} = 0$ en régime stationnaire

$\Longrightarrow \Phi_{cond}(x)dt - \Phi_{cond}(x + dx)dt - \Phi_{conv}dt = 0 \Longrightarrow \Phi_{cond}(x) - \Phi_{cond}(x + dx) - \Phi_{conv} = 0$

$\Longrightarrow -d\Phi_{cond} - hS_{lat} \times (T - T_{ext}) = 0$ avec $S_{lat} = 2\pi R dx$

$\Longrightarrow d\Phi_{cond} = -h \times 2\pi R dx \times (T - T_{ext}) \Longrightarrow \frac{d\Phi_{cond}}{dx} dx = -h \times 2\pi R dx \times (T - T_{ext})$

$\Longrightarrow \frac{d\Phi_{cond}}{dx} = -2\pi R h \times (T - T_{ext}) \Longrightarrow -\lambda \pi R^2 \frac{d^2T}{dx^2} = -2\pi R h \times (T - T_{ext})$
$\Longrightarrow \boldsymbol{\frac{d^2\theta}{dx^2} - \frac{2h}{\lambda R}\theta = -\frac{2h}{\lambda R}\theta_{ext}}$

La solution s'écrit : $\boldsymbol{\theta = Ae^{-\frac{x}{L_C}} + Be^{+\frac{x}{L_C}} + \theta_{ext}}$

Avec $\boldsymbol{\theta_{ext} = \theta_{bain}} \approx 0°\boldsymbol{C}$ dans l'air du calorimètre

et $L_C = \sqrt{\frac{\lambda R}{2h}}$ AN : $L_C = 0{,}041\ m = 4{,}1\ cm$
Condition aux limites :

$\theta(x = L) = 0$; or $L/L_C = 4{,}88$, donc le terme $e^{-\frac{L}{L_C}} \longrightarrow 0$ et $e^{+\frac{L}{L_C}} = 132 \Longrightarrow \boldsymbol{B} = 0$ sinon θ atteindrait des valeurs non raisonnables
$\theta(x = 0) = \theta_{salle} = 18°C \Longrightarrow \boldsymbol{A} = 18$ ° $\boldsymbol{C}$

On en déduit : $\boldsymbol{\theta} = 18 \times \boldsymbol{e}^{-\frac{x}{0{,}041}}$on retrouve l'ajustement proposé (on retrouve par ailleurs que $\theta(x = L) = 0{,}14°C$ ce qui est cohérent)