Crémage du lait

Question simple

1. Établir la relation fondamentale de la statique des fluides
2. Donner l'origine microscopique de la poussée d'Archimède.
3. Donner puis démontrer l'expression de la poussée d'Archimède.
4. A quelle(s) condition(s) peut-on négliger la poussée d'Archimède ?

Question ouverte

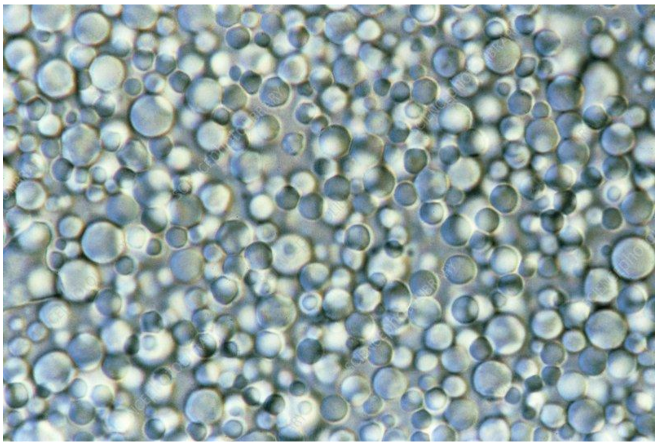
Le lait contient des globules gras, qui sont des microgouttelettes de matière grasse dispersée dans la phase aqueuse du lait. Laissé au repos, les globules gras, moins denses que la phase aqueuse, remontent progressivement à la surface : on dit que le lait *crème*.

On considère un lait entier contenant 3,5 % en masse de matière grasse.

1. Estimer le temps que met une particule de gras pour remonter à la surface d'un verre contenant ce lait entier.

2. Estimer l'épaisseusr finale de la couche de crème.

Document 1 : Lait entier au microscope (1cm représente 10µm)



Document 2 : Loi de Stokes

La loi de Stokes donne la force de traînée hydrodynamique s'exerçant sur une sphère en déplacement dans un fluide à bas nombre de Reynolds (inférieur à 1) et si la sphère est suffisamment loin de tout autre corps, de tout obstacle ou paroi latérale (on considère une paroi éloignée d'au moins dix fois le rayon de la sphère). Dans ce cas, la force de traînée hydrodynamique s'écrit :

$$\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{V}$$

où η est la viscosité dynamique du fluide (en $Pa \cdot s$), R le rayon de la sphère et $\vec{V}$ la vitesse de la sphère.

Document 3 : Donnée

Masse volumique de l'huile : $\mu_{huile} = 900\ kg \cdot m^{-3}$

Coefficient de diffusion des globules gras : $D_g \approx 10^{-13}\ m^2 \cdot s^{-1}$

Questions au cours de l'oral :

3. Critique du modèle avec notamment
   - une estimation de la valeur du nombre de Reynolds
   - une discussion pour estimer si le phénomène de diffusion peut être négligé pour expliquer la remontée des globules gras ?

Crémage du lait : correction

Question simple

Voir cours pour les 3 premières questions

Pour la dernière question, on peut attendre de l'élève qu'il trouve les conditions pour négliger la poussée d'Archimède s'exerçant sur un corps immergé de volume V devant son poids :

$\Pi_A \ll P \Longrightarrow m_{fluide\ déplacé}g \ll m_{corps}g \Longrightarrow m_{fluide\ déplacé}g \ll m_{corps}g$

$\Longrightarrow m_{fluide\ déplacé} \ll m_{corps} \Longrightarrow \mu_{fluide}V \ll \mu_{corps}V \Longrightarrow \boldsymbol{\mu_{fluide}} \ll \boldsymbol{\mu_{corps}}$

Question ouverte

1) Modèle mécanique (avec schéma)

Référentiel : Terrestre (supposé galiléen)

Système : Globule gras

Forces extérieures (V étant le volume d'un globule gras supposé sphérique de rayon R, m sa masse):

-Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = \mu_g V\vec{g} =$ $\quad V = \frac{4}{3}\pi R^3$

-Force de frottement : $\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$

-Poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = -m_f\vec{g} = -\mu_{lait}V\vec{g} = -\mu_{lait}\frac{m}{\mu_g}\vec{g} = -\frac{\mu_{lait}}{\mu_g}m\vec{g}$

En appliquant le principal fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m\vec{g} - \frac{\mu_{lait}}{\mu_g}m\vec{g} - 6\pi\eta R\vec{v} \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \frac{\mu_{lait}}{\mu_g}m\vec{g} - 6\pi\eta R\vec{v}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{6\pi\eta R}{m}\vec{v} = \left(1 - \frac{\mu_{lait}}{\mu_g}\right)\vec{g} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{9\eta}{2R^2\mu_g}\vec{v} = \left(1 - \frac{\mu_{lait}}{\mu_g}\right)\vec{g}} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\vec{v}}{\tau} = \left(1 - \frac{\mu_{lait}}{\mu_g}\right)\vec{g}}$$

avec $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\frac{2R^2\mu_g}{9\eta}}$

AN : avec : $\eta = \eta_{lait} \approx \eta_{eau} \approx 10^{-3}\ Pa \cdot s$ $\quad \mu_{lait} \approx \mu_{eau} = 1000\ kg \cdot m^{-3}$ $\quad \mu_g \approx \mu_{huile} = 900\ kg \cdot m^{-3}$ et $R \approx 1\ \mu m = 1 \times 10^{-6} m$ (par lecture graphique)

$\boldsymbol{\tau} = 2 \times 10^{-7}\ \boldsymbol{s}$ **: le régime stationnaire est atteint très rapidement (5 $\boldsymbol{\tau}$) par rapport à la durée du phénomène**

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{v_{lim}} = \tau\left(1 - \frac{\mu_{lait}}{\mu_g}\right)\vec{g} = \frac{2R^2\mu_g}{9\eta}\left(1 - \frac{\mu_{lait}}{\mu_g}\right)\vec{g} \Longrightarrow \boldsymbol{v_{lim}} = \boldsymbol{\frac{2R^2\mu_g}{9\eta}\left(1 - \frac{\mu_{lait}}{\mu_g}\right)g}$$

AN : $\boldsymbol{v_{lim}} = 2 \times 10^{-7}\boldsymbol{m \cdot s^{-1}}$

Temps Δt de remontée d'un globule gras initialement au fond du verre de hauteur $H \approx 10\ cm$:

$\Delta t = \frac{H}{v_{lim}}$ $\qquad$ AN : $\boldsymbol{\Delta t} \approx 5 \times 10^5\ \boldsymbol{s} = 6\ \boldsymbol{jours}$

2) Estimation de l'épaisseur finale de la couche de crème

Exprimons le volume total V_{gras} de globule gras :

Le lait entier contenant 3,5 % en masse de matière grasse :
$\frac{m_{gras}}{m_{lait}} = 0{,}035 \Longrightarrow \frac{\mu_g V_{gras}}{\mu_{lait} V_{lait}} = 0{,}035 \Longrightarrow V_{gras} = 0{,}035 \times \frac{\mu_{lait} V_{lait}}{\mu_g} = 0{,}035 \times \frac{\mu_{lait} HS}{\mu_g}$ où S est la surface intérieure du verre (supposée constante sur sa hauteur)

Si le gras remonte en totalité à la surface, en notant e l'épaisseur de la couche formée : $V_{gras} = eS$

$\Longrightarrow eS = 0{,}035 \times \frac{\mu_{lait} HS}{\mu_g} \Longrightarrow e = 0{,}035 \times \frac{\mu_{lait} H}{\mu_g}$ AN : $\boldsymbol{e} \approx 4 \times 10^{-3} \boldsymbol{m} = 4\ \boldsymbol{mm}$

3) Critique du modèle :

- L'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche de gras, qui ne nécessite pas de modèle mécanique, est tout à fait correct

- Par contre, l'ordre de remontée d'un globule gras estimée avec le modèle présenté ci-dessus semble surestimé très largement.

  Par ailleurs, on a estimé uniquement le temps de remontée d'un globule gras situé au fond du récipient dans le calcul.

  Tout d'abord, on peut observer que dans le modèle, on n'a pas considéré l'hétérogénéité de la taille des gouttelettes.

- On peut contrôler que l'on se trouve dans le régime de Stokes, nécessité pour appliquer la loi de Stokes fournie :

  $R_e = \frac{UL}{\eta_{lait}} \mu_{lait} = \frac{v_{lim} \times (2R)}{\eta_{lait}} \mu_{lait}$ AN : $R_e = 4 \times 10^{-7} \ll 1$: la loi de Stokes est bien applicable

- On peut aussi se demander si le phénomène de diffusion ne peut aussi intervenir :

  $D_g = \frac{H^2}{\tau_{diff}} \Longrightarrow \tau_{diff} = \frac{H^2}{D_g}$ AN : $\tau_{diff} \approx 10^{11} s \gg \Delta t$, donc le phénomène de diffusion est très largement plus lent que la remontée estimée avec l'étude mécanique ci-dessus, et ne peut pas expliquer la durée calculée trop grande de remontée des globules gras

  On peut penser que le phénomène (mais non quantifiable) que l'on a négligé est la convection et pourrait expliquer le crémage bien plus rapide observé en réalité.

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# ---------------------------------------------------------
# Données physiques
# ---------------------------------------------------------
rho_lait = 1000       # kg/m3
rho_huile = 900       # kg/m3
eta = 1e-3            # viscosité du lait (Pa.s)
R = 1e-6              # rayon du globule gras (m)
g = 9.81              # gravité (m/s2)

# ---------------------------------------------------------
# Constantes du modèle
# ---------------------------------------------------------
tau = 2 * R**2 * rho_huile / (9 * eta)
A = (1 - rho_lait / rho_huile) * g   # terme source

# ---------------------------------------------------------
# Méthode d'Euler
# ---------------------------------------------------------
dt = 1e-4
t_max = 1e-2
N = int(t_max / dt)

t = np.linspace(0, t_max, N)
v = np.zeros(N)
z = np.zeros(N)

for i in range(N - 1):

    #A COMPLETER

```