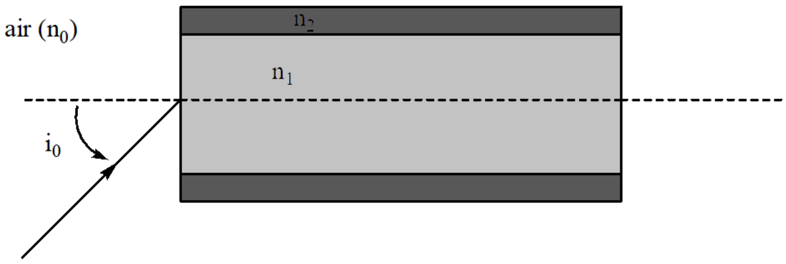
Fibre optique

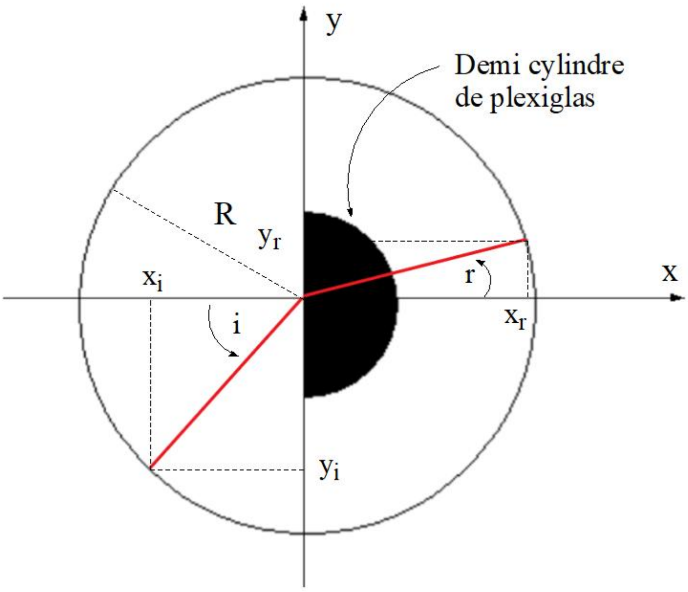
Question simple

- Enoncer les lois de Snell-Descartes
- Quelle est la valeur maximale de l'angle incident i_0 pour que le rayon reste dans la fibre optique ?



Question ouverte

Deux étudiants, Alice et Barnabé, veulent mesurer l'indice optique, noté n_p, d'un demi-cylindre de plexiglass. Ils utilisent un laser dans le dispositif ci-contre. On notera n_a l'indice de l'air.
Sur le cercle de rayon R, ils relèvent les coordonnées (x_i, y_i) et (x_r, y_r) caractérisant respectivement le rayon incident et le rayon réfracté. Ils obtiennent les résultats suivants :



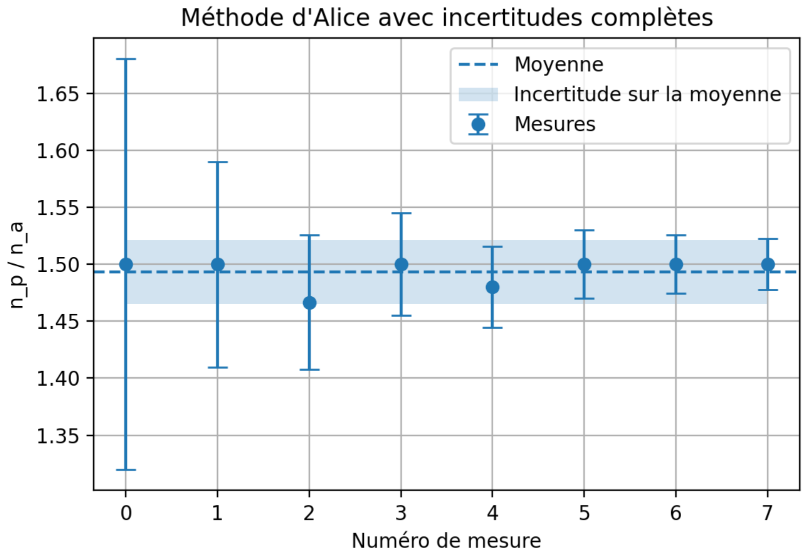
Mesure	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
$\lvert x_i \rvert$(mm)	141	138	134	128	121	109	95	75
$\lvert y_i \rvert$(mm)	15	30	44	60	74	90	105	120
x_r (mm)	141	140	138	136	132	128	123	117
y_r (mm)	10	20	30	40	50	60	70	80

1. Décrire en détail la méthode de traitement des résultats choisie par Alice (documents 1 et 2)
2. Comparer la méthode d'Alice avec celle de Barnabé. Laquelle vous semble la plus précise ?
3. On envoie un rayon lumineux pendant un temps infiniment court dans une gaine de fibre optique. Le rayon ressort de la fibre de longueur L après un temps Δt.
   Exprimer Δt en fonction de L notamment de L, i_0, n_1 et n_2 on prendra $n_0 = 1$)
   Applications numériques pour la valeur minimale et la valeur maximale de i_0 :
   - $n_0 = 1{,}000$
   - $n_1 = 1{,}456$ (silice)
   - $n_2 = 1{,}410$ (silicone)
   - L = 10 m

Document 1 : script python écrit par Alice pour traitement des résultats

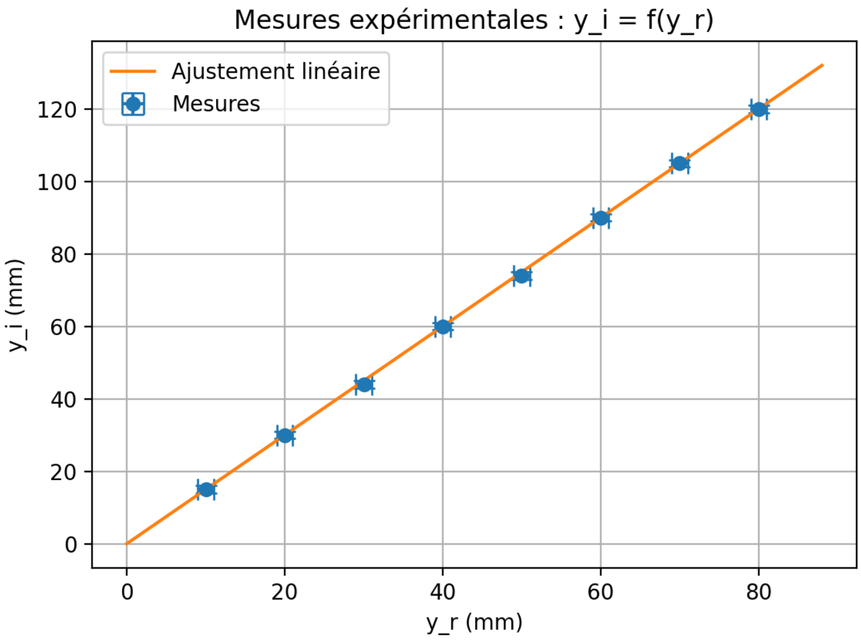
```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# ----------------------------
# Paramètres expérimentaux
# ----------------------------
u_y = 1  # mm (incertitude de lecture)

# ----------------------------
# Mesures (en mm)
# ----------------------------
y_i = np.array([15, 30, 44, 60, 74, 90, 105, 120])
y_r = np.array([10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80])
N = len(y_i)

# ----------------------------
# Calcul des rapports
# ----------------------------
x = y_i / y_r  # = sin(i)/sin(r)

# ----------------------------
# Incertitudes instrumentales
# ----------------------------
u_x = x * np.sqrt((u_y / y_i)**2 +(u_y / y_r)**2)

# ----------------------------
# Moyenne et incertitudes
# ----------------------------
x_moy = np.mean(x)

# Incertitude statistique
s = np.std(x, ddof=1)
u_stat = s / np.sqrt(N)

# Incertitude instrumentale sur la moyenne
u_inst = np.sqrt(np.sum(u_x**2)) / N

# Incertitude totale
u_tot = np.sqrt(u_stat**2 + u_inst**2)

# ----------------------------
# Tracé du graphe
# ----------------------------
plt.figure()

# Points expérimentaux avec barres d’erreur
plt.errorbar(range(N),x,yerr=u_x,fmt='o',capsize=5,label="Mesures")

# Moyenne (ligne horizontale)
plt.axhline(x_moy, linestyle='--', label="Moyenne")

# Bande d’incertitude
plt.fill_between(range(N),x_moy - u_tot,x_moy + u_tot,alpha=0.2,label="Incertitude sur la moyenne")

plt.xlabel("Numéro de mesure")
plt.ylabel("n_p / n_a")
plt.title("Méthode d'Alice avec incertitudes complètes")
plt.grid()
plt.legend()

plt.show()

# ----------------------------
# Résultats
# ----------------------------
print("Résultats méthode d'Alice :")
print(f"Moyenne = {x_moy:.3f}")
print(f"Incertitude statistique = {u_stat:.3f}")
print(f"Incertitude instrumentale = {u_inst:.3f}")
print(f"Incertitude totale = {u_tot:.3f}")
```

Document 2 : résultats du script python écrit par Alice




```
>>> (executing file "script Alice comple
t_graphe [incertitudes instrumentales et
statistiques].py")
Résultats méthode d'Alice :
Moyenne = 1.493
Incertitude statistique = 0.005
Incertitude instrumentale = 0.028
Incertitude totale = 0.028
```

Document 3 : résultats du script python écrit par Barnabé pour le traitement des résultats




```
>>> (executing file "script Bertrand déf
initif [version polyfit Monte Carlo].py"
)
Pente = 1.500 ± 0.028
```

<u>Document 4</u> : formules de propagation des incertitudes

- Somme ou différence :

$$si\ \ Y = X_1 + X_2\ ou\ Y = X_1 - X_2\ alors\ \ u(Y) = \sqrt{u(X_1)^2 +\ u(X_2)^2}$$

- Produit ou rapport :

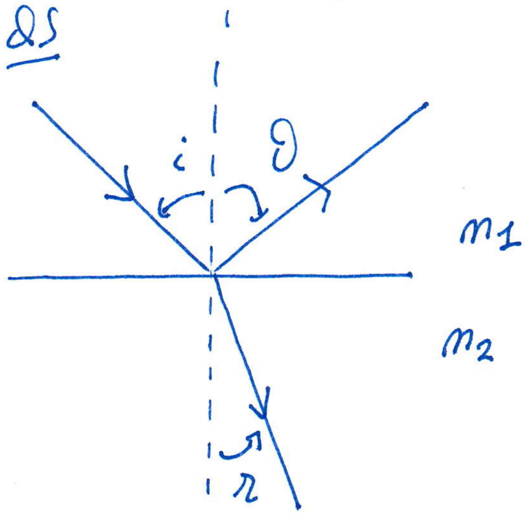
$$si\ \ Y = X_1 \times X_2\ ou\ Y = \frac{X_1}{X_2}\ alors\ \frac{u(Y)}{Y} = \sqrt{\left(\frac{u(X_1)}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{u(X_2)}{X_2}\right)^2}$$

<u>Document supplémentaire</u> : script python de la méthode de Barnabé

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# ----------------------------
# Paramètres expérimentaux
# ----------------------------
u_y = 1  # mm (incertitude règle)
N = 10000  # simulations Monte Carlo

# ----------------------------
# Mesures (en mm)
# ----------------------------
y_i = np.array([15, 30, 44, 60, 74, 90, 105, 120])
y_r = np.array([10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80])

# ----------------------------
# Monte Carlo
# ----------------------------
pentes = []
for _ in range(N):
# Tirages aléatoires
    y_i_sim = y_i + np.random.normal(0, u_y, size=len(y_i))
    y_r_sim = y_r + np.random.normal(0, u_y, size=len(y_r))
# Régression linéaire
    coeffs = np.polyfit(y_r_sim, y_i_sim, 1)
    pentes.append(coeffs[0])
pentes = np.array(pentes)

# Résultats
a_moy = np.mean(pentes)
u_a = np.std(pentes, ddof=1)

# ----------------------------
# Tracé principal
# ----------------------------
plt.figure()

# Données expérimentales avec barres d'erreur
plt.errorbar(y_r,y_i,xerr=u_y,yerr=u_y,fmt='o',capsize=5,label="Mesures")

# Droite ajustée
x_fit = np.linspace(0, max(y_r)*1.1, 100)
y_fit = a_moy * x_fit

plt.plot(x_fit, y_fit, label="Ajustement linéaire")
plt.xlabel("y_r (mm)")
plt.ylabel("y_i (mm)")
plt.title("Mesures expérimentales : y_i = f(y_r)")
plt.grid()
plt.legend()
plt.show()

# ----------------------------
# Résultat
# ----------------------------
print(f"Pente = {a_moy:.3f} ± {u_a:.3f}")
```

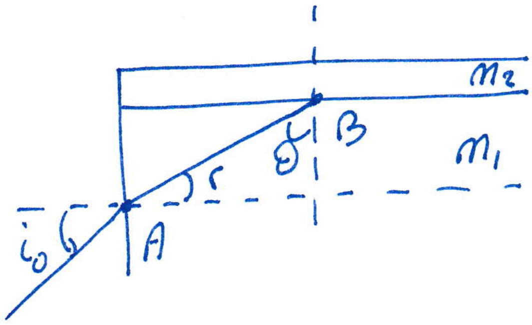
Correction : fibre optique

QS



Lois de Snell-Descartes :

- le rayon réfléchi et le rayon réfracté sont dans le plan d'incidence
- rayon réfléchi : $\theta = i$
- rayon réfracté : $n_1 \sin i = n_2 \sin r$



- Réflection totale en B : $n_1 \sin\theta = n_2$. (a)
- $\theta + r = \pi/2$ (b)
- $n_0 \sin i_0 = n_1 \sin r$ (c)

$$\Rightarrow n_0 \sin i_0 \underset{(b)}{=} n_1 \sin(\pi/2 - \theta) = n_1 \cos\theta = n_1\sqrt{1 - \sin^2\theta}$$

$$\underset{(a)}{\Rightarrow} n_0 \sin i_0 = n_1\sqrt{1 - \frac{n_2^2}{n_1^2}} \Rightarrow \sin i_0 = \frac{1}{n_0}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

$$\Rightarrow i_{max} = \arcsin\left(\frac{1}{n_0}\sqrt{n_1^2 - n_2^2}\right)$$

Question ouverte

1. Méthode d'Alice

$\sin i = \dfrac{y_i}{R}$ et $n_a \sin i = n_p \sin r$

$\sin r = \dfrac{y_r}{R}$

$$\Rightarrow \quad \frac{n_p}{n_a} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{g_i}{g_r}$$

$\Rightarrow$ Alice choisit de calculer le rapport $\frac{n_p}{n_a}$ pour chaque mesure (avec $n_a = 1$)

- Incertitude de mesure :

  * $n_p = n_a \frac{g_i}{g_r} \Rightarrow \frac{u(n_p)}{n_p} = \sqrt{\left(\frac{u(g_i)}{g_i}\right)^2 + \left(\frac{u(g_r)}{g_r}\right)^2}$ ligne 24

    ↳ calcul fait pour chaque mesure : $u(n_p)$ varie pour chaque mesure. Notamment les mesures pour g_r faibles conduisent à une incertitude + grande sur n_p.

  * composition des incertitudes de mesure.

    $u_{inst} = \sqrt{\frac{u^2(n_p)_{(1)} + u^2(n_p)_{(2)} + \dots u^2(n_p)_{(8)}}{8}}$ ligne 36

- Incertitude statistique

  - $n_{p\,moy}$: moyenne des 8 mesures ligne 29
  - σ : écart type des 8 mesures : ligne 32.

  $\Rightarrow u_{stat} = \frac{\sigma}{\sqrt{8}}$: ligne 33

- composition des deux sources d'incertitude

  $u_{tot} = \sqrt{u^2_{inst} + u^2_{stat}}$.

Rq : pour cette étude la source principale d'incertitude est celle de mesure : $u_{inst} = 0{,}028$

$u_{stat} = 0{,}005$

2. Méthode de Barnabé

$$y_i = R\sin i \qquad y_r = R\sin r \quad \Rightarrow \quad \frac{y_i}{y_r} = \frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_p}{n_a}$$

$n_a = 1 \Rightarrow y_i = n_p \cdot y_r$

$\Rightarrow$ en traçant y_i en fonction de y_r on obtient n_p avec la pente de la régression linéaire.

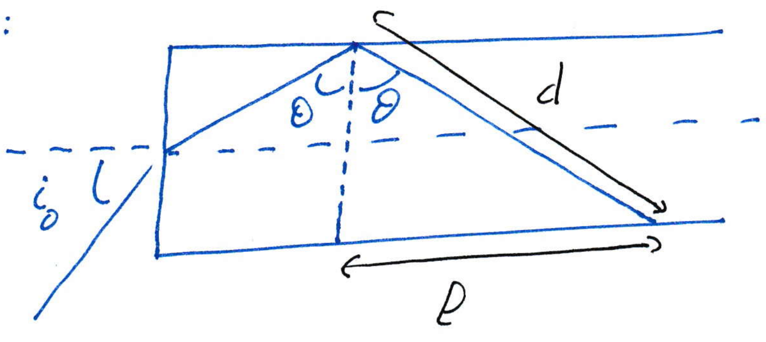
Les deux méthodes donnent la même incertitude.
La méthode d'Alice a l'inconvénient d'amplifier les incertitudes pour les faibles valeurs de y_r

3. Soit v la vitesse de propagation dans la fibre optique

$$v = \frac{c}{n_1}$$

$i_0 = 0$: $\Delta t_{min} = \dfrac{L}{v}$ AN : $\Delta t_{min} = 4{,}7 \cdot 10^{-8}$ s.

$i_0 = i_{max}$:



Soit D la distance parcourue par le rayon

$$D = n \times d \quad \text{avec} \quad n = \frac{L}{\ell}$$

$$\Rightarrow D = L \times \frac{d}{\ell}$$

or $\begin{cases} \sin\theta = \dfrac{\ell}{d} \\ \sin\theta = \dfrac{n_2}{n_1} \end{cases}$

$$\Rightarrow D = L \times \frac{1}{\sin\theta} = L \times \frac{n_1}{n_2}$$

$$\Rightarrow \Delta t_{max} = \frac{D}{v} = L \frac{n_1}{n_2} \times \frac{n_1}{c}$$

AN : $\Delta t_{max} = 4{,}85 . 10^{-8}$ s.