Montée de la sève dans un arbuste

Question simple

Soit un tube capillaire de rayon R contenant un liquide de masse volumique ρ jusqu'à une hauteur h. On note θ l'angle de mouillage.

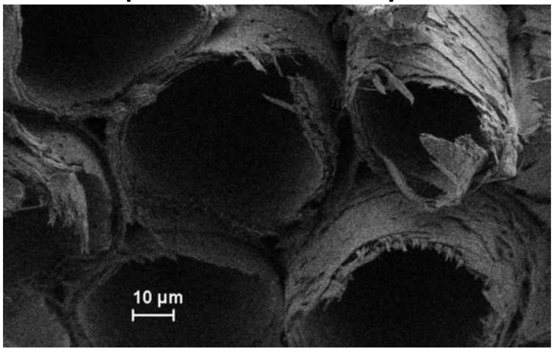
Démontrer la loi de Jurin en utilisant une méthode énergétique.

Question ouverte

Déterminer la hauteur atteinte par la sève et sa durée d'ascension dans le xylème.

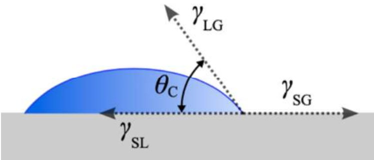
Pour cela :
- on explicitera la force de frottement visqueux exercée par les parois du vaisseau sur le fluide en ascension capillaire, en fonction la vitesse moyenne du fluide v ;
- on explicitera la force qui dérive de l'énergie potentielle de tension superficielle en fonction de l'angle de mouillage ;
- on discutera du modèle de Washburn présenté au document 7.

Document 1 : photographique du microscope des vaisseaux de xylème



Document 2 : la loi d'Young

γ_{SL} : coefficient de tension superficielle de l'interface solide / liquide
γ_{LG} : coefficient de tension superficielle de l'interface liquide / gaz
γ_{SG} : coefficient de tension superficielle de l'interface solide / gaz
θ_c : angle de mouillage



$$\gamma_{SL} + \gamma_{LG}\, cos\theta_c = \gamma_{SG}$$

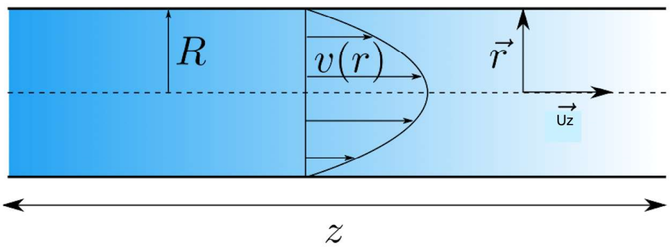
Document 3 : l'échelle capillo-gravitaire
Les effets de capillarité sont en compétition avec les effets de la gravité. En utilisant les grandeurs caractéristiques (masse volumique du fluide ρ, coefficient de tension superficielle air/fluide γ et accélération de pesanteur g, on peut construire une loi échelle :

$$\ell_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}}$$

Où ℓ_c est appelée longueur capillaire (elle correspond à la hauteur du ménisque). Si le rayon du capillaire est inférieur à la longueur capillaire, les effets de la gravité peuvent être négligés.

Document 4 : données numériques
Coefficient de tension superficielle air-eau : $\gamma_{air-eau} = 73\ mJ \cdot m^{-2}$
Viscosité dynamique de l'eau : $\eta = 1\ mPa \cdot s$

Document 5 : force de frottement visqueux s'exerçant sur un fluide en mouvement



Soit un fluide visqueux et newtonien s'écoulant dans un cylindre de rayon R et de longueur z en régime laminaire et stationnaire. Le profil des vitesses suit une loi de type Poiseuille :

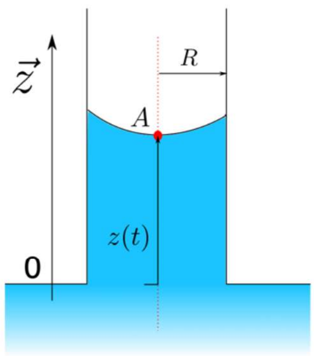
$$\vec{v}(r) = \frac{\Delta P R^2}{4\eta z}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)\vec{u}_z$$

La force de frottement visqueux exercée par la paroi sur le fluide a pour expression :

$$\vec{F_v} = 2\pi R \eta z \left(\frac{dv(r)}{dr}\right)_R \vec{u}_z$$

Document 6 : débit de volume
Pour un fluide réel se déplaçant à la vitesse moyenne v le débit de volume est donné par la relation $D_v = constante\ \times v$ où $constante$ est la section droite de l'écoulement.

Document 7 : modèle de Washburn
Nous considérons le cas d'un capillaire vertical sec de rayon R qui est soumis au contact d'un réservoir de liquide mouillant. Sous l'effet de la capillarité, le fluide envahit le capillaire. La hauteur du ménisque z(t) (matérialisée par le point A) est une fonction du temps que l'on peut établir dans le cadre de deux modèles. Le modèle général consiste à réaliser une étude mécanique sur le fluide en ascension. Le modèle de Washburn est valide pour des nombres de Reynolds très bas et considère que l'imprégnation se fait à quantité de mouvement constante.



Script à remettre pendant l’oral

```python
# Paramètres du problème
#import des bibliothèques
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.integrate import odeint

#caractéristiques du système
gamma = 73e-3           #coefficient de tension superficielle air/eau J/m2
eta = 1e-3              #viscosité dynamique de l'eau en Pa·s
R = 20e-6               #rayon du xylème en m
rho = 1000              # masse volumique de de l'eau en kg/m-3
g = 9.81                #accélération de pesanteur en m/s2

# Initialisation du pas de temps
tmax = 400 #temps d'acquisition en s
n = 2000  # nombre de pas de temps
h = tmax/n  # pas de temps
t = np.linspace(0, tmax, n+1)  # n+1 valeurs qui délimitent bien n intervalles
z = np.zeros(n+1)
v = np.zeros(n+1)
z0 = 0.01  # m
v0 = 0  # m/s
z[0] = z0
v[0] = v0

#modèle de washburn
for i in range(n):
    c= R*gamma/(4*eta)
    #A COMPLETER
    #A COMPLETER

plt.plot(t, z)
plt.xlabel('t (s)')
plt.ylabel('h (m) modèle Washburn')
plt.grid()
plt.show()
```

Correction question simple

Démo : voir cours

Correction question ouverte

Calcul de la hauteur prévue par la loi de Jurin, en supposant un mouillage parfait :

$$h = \frac{2\,\gamma_{LG}\,cos\theta}{\rho g R} = \frac{2 \times 73 \times 10^{-3}}{1000\ \times 9{,}81 \times 20 \times 10^{-6}} = 0{,}74\,m$$

Calcul du temps d'ascension :

1. Force de frottement visqueux (doc 5+6)

$\vec{F_v} = 2\pi R\eta z \left(\frac{dv(r)}{dr}\right)_R \vec{u}_z = -\,\Delta P\ \pi R^2\ \vec{u}_z$

Or d'après la loi de Poiseuille et le document 6 : $D_v = \frac{\Delta P\ \pi R^4}{8\eta z} = v \cdot \pi R^2$

On isole $\Delta P \pi R^2\ = 8\eta z\pi\ v$

En réinjectant dans l'expression de la force de frottements visqueux : $\boldsymbol{\vec{F_v} = -\,8\eta\pi \cdot z \cdot v \cdot \vec{u}_z}$

2. Force de tension superficielle

On exprime l'énergie potentielle lors de l'ascension capillaire :

$$dE_{p,\gamma}(z) = (\gamma_{SL} - \gamma_{SG})dS = 2\pi R\ (\gamma_{SL} - \gamma_{SG})\ dz$$

En utilisant la loi d'Young :

$$dE_{p,\gamma}(z) = -2\pi R\ \gamma_{LG}\cos(\theta)\ dz$$

Or la force de tension superficielle dérive de cette énergie potentielle :

$$\vec{F_\gamma} = -\frac{dE_{p,\gamma}}{dz}\vec{u}_z$$

$$\boldsymbol{\vec{F_\gamma} = \ 2\pi R\ \gamma_{LG}\cos(\theta)\ \vec{u}_z}$$

RQ : la force est bien dirigée vers le haut, ce qui est cohérent avec l'ascension capillaire.

3. Modèle de Washburn

$\ell_c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}} = 0{,}003$ m ce qui est très supérieur au rayon d'un vaisseau. On peut donc négliger le poids.

On peut demander au candidat de vérifier l'homogénéité de cette loi d'échelle.

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen et sur le système ouvert (mais fermé par la pirouette habituelle), on établit le bilan des forces :

- Force de tension superficielle : $\vec{F_\gamma} = \ 2\pi R\ \gamma_{LG}\cos(\theta)\ \vec{u}_z$
- Force de frottement fluide : $\vec{F_v} = -\,8\eta\pi \cdot z \cdot v \cdot \vec{u}_z$

On applique le PFD avec une quantité de mouvement constante.

$$\vec{F_\gamma} + \vec{F_v} = \vec{0}$$

En projection sur (Oz) :

$$2\pi R\,\gamma_{LG}\cos(\theta) = 8\eta\pi \cdot z \cdot v$$
$$v = \frac{R\,\gamma_{LG}\cos(\theta)}{4\eta \cdot z}$$
$$\boldsymbol{\frac{dz}{dt} = \frac{c}{z}}$$

Par séparation des variables, on trouve $z(t) = \sqrt{\frac{R\,\gamma_{LG}\cos(\theta)}{2\eta}t}$

On cherche t tel que z(t) = 0,74 m soit **750 s** (12-13 minutes)

4. Discussion

Le modèle de Washburn ne converge pas … c'est problématique, l'ascension ne s'arrête jamais.

On peut refaire l'étude en considérant que la quantité de mouvement n'est pas constante et en considérant le poids mais l'équation n'est pas résolvable (j'en tenté une résolution numérique avec Euler mais j'obtiens n'importe quoi).

$$\dot{z}^2 + z.\ddot{z} = \frac{2.\gamma.\cos(\theta_E)}{\rho.R} - \frac{8.\eta}{\rho.R^2}.z.\dot{z} - z.g$$

Calcul du nombre de Reynold, en prenant comme vitesse moyenne v = 0,75/750 $m{\cdot}s^{-1}$.

$R_e = \frac{2R\rho v}{\eta} = \frac{2\times20\times10^{-6}\times1000\times0{,}001}{10^{-3}} = 0{,}04.$

On a bien un écoulement rampant qui est une hypothèse nécessaire au modèle de Washburn.

https://colab.research.google.com/drive/1lUJu17RsUMhlB5NIXPHjINd5OMpz9BTG?usp=sharing