

Ballon poreux

On considère un ballon gonflé à l'hélium, assimilé à un gaz parfait. Pour la question simple et la question ouverte, on considèrera les champs des températures et des pressions uniformes ($T_0 = 273\text{ K}$ et $P_0 = P_{atm}$). Le ballon est en latex et pèse $m_0 = 2\text{ g}$ lorsqu'il est vide.

Question simple

Quelles doivent être les dimensions minimales du ballon pour que celui-ci flotte (volume et rayon) ?

Question ouverte

A l'état initial, le ballon est gonflé d'hélium. Son volume est de 2,2 L. Le latex qui le constitue est poreux, ce qui permet à l'hélium de s'échapper. On suppose qu'une loi phénoménologique relie la pression en hélium dans le ballon P_{int} au rayon du ballon r : $P_{int} = \frac{K}{r}$ ou K est une constante qui s'exprime en Pa·m

Exprimer le flux particulaire de l'hélium à travers le latex.
Quel sera le temps au bout duquel le ballon ne flottera-t-il plus ?

Données :

Masse molaire atomique en $\text{g}\cdot\text{mol}^{-1}$: He : 4 N : 14 O : 16

Composition de l'air : 20 % de O_2 et 80 % de N_2

Coefficient de diffusion de l'hélium à travers une paroi en latex : $D = 10^{-10}\text{ m}^2\cdot\text{s}^{-1}$

Épaisseur du latex : $\delta = 0,5\text{ mm}$

Ballon poreux - CORRECTION

Correction question simple

Référentiel : terrestre supposé galiléen

Système : le ballon gonflé (air + paroi en latex) assimilé à un point matériel de masse $m = m_0 + \rho_{He}V$

Volume du ballon : $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

Masse du ballon gonflé :

$$m = m_0 + \rho_{He}V = m_0 + \frac{P_0 M_{He}}{RT_0} V$$

BDF : poids et poussée d'Archimède (= résultante de toutes les forces pressantes, cf BCPST1).

PDF à l'équilibre, axe (Oz) ascendant :

$$\begin{aligned}\vec{P} + \vec{\Pi} &= \vec{0} \\ -mg \vec{u}_z + \rho_{air} g V \vec{u}_z &= \vec{0}\end{aligned}$$

En projetant sur (Oz), on obtient la condition de flottaison :

$$\begin{aligned}mg &\leq \rho_{air} g V \\ m_0 + \frac{P_0 M_{He}}{RT_0} V &\leq \frac{P_0 M_{air}}{RT_0} V \\ \frac{m_0 RT_0}{P_{atm}(M_{air} - M_{He})} &\leq V \\ V_{min} &= \frac{m_0 RT_0}{P_{atm}(M_{air} - M_{He})}\end{aligned}$$

AN :

$$M_{air} = 0,2 M_{O_2} + 0,8 M_{N_2} = 29 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$V_{min} = \frac{2 \times 10^{-3} \times 8,314 \times 273}{10^5 (29 - 4) \times 10^{-3}} = 0,0018 \text{ m}^3$$

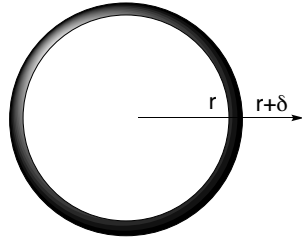
Le ballon fait $V_{min} = 1,8 \text{ L}$ ce qui correspond à un rayon de $r_{min} = 7,6 \text{ cm}$ si on assimile le ballon une sphère.

Correction question ouverte

Partie 1 – expression du flux

A l'état initial, $V_0 = 2,2 \text{ L}$ qui correspond à un rayon de $r_0 = 8 \text{ cm}$.

- On note n^*_p la densité particulaire dans le ballon à r .
- On suppose la densité particulaire nulle à l'extérieur à $r + \delta$.



Loi de Fick dans la paroi d'épaisseur δ (en noir sur le schéma) :

$$\phi = -DS \frac{dn^*_{*p}}{dr}$$

$$\phi = -D4\pi r^2 \frac{dn^*_{*p}}{dr}$$

On sépare les variables :

$$dn^*_{*p} = -\frac{\phi}{4\pi D} \frac{dr}{r^2}$$

En supposant le régime stationnaire, en l'absence de source interne et en intégrant entre l'intérieur et l'extérieur du ballon à travers la paroi de latex d'épaisseur δ :

$$\int_{n^*_{*p}}^0 dn^*_{*p} = -\frac{\phi}{4\pi D} \int_r^{r+\delta} \frac{dr}{r^2}$$

$$n^*_{*p} = \frac{\phi}{4\pi D} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+\delta} \right) \approx \frac{\phi}{4\pi D} \frac{\delta}{r^2}$$

$$\phi = \frac{4\pi D}{\delta} r^2 n^*_{*p}$$

L'hélium contenu dans le ballon est parfait et à la pression P_{int} :

$$n^*_{*p} = \frac{P_{int} N_a}{RT_0} = \frac{KN_a}{RT_0} \frac{1}{r}$$

Il vient donc : $\phi = \frac{4\pi D}{\delta} \frac{KN_a}{RT_0} r$ (1)

Partie 2 – temps de vol

On calcule le temps nécessaire pour que le rayon du ballon passe de r_0 à r_{min} . Le flux particulaire à travers la paroi provient du stock d'hélium à l'intérieur du ballon :

$$\phi = \frac{\delta N}{dt} = -\frac{dN}{dt}$$

dN est la variation du nombre de particules d'hélium dans la coquille sphérique comprise entre r et $r+dr$ avec $dr < 0$ lorsque le ballon se dégonfle.

Pour simplifier, on va supposer que la densité particulaire varie peu entre r_0 et r_{min} . Quand on fait les AN on trouve :

$$n^*_{*p}(r_0) = \frac{KN_a}{RT_0} \frac{1}{r_0}$$

$$n^*_{p}(r_{min}) = \frac{KN_a}{RT_0} \frac{1}{r_{min}}$$

$$\frac{n^*_{p}(r_{min})}{n^*_{p}(r_0)} = \frac{r_0}{r_{min}} = 1,06$$

Ce qui n'est pas déconnant

$$\phi = -\frac{d(Vn^*_{p})}{dt} = -n^*_{p} \frac{dV}{dt} = -\frac{P_{int}N_a}{RT_0} 4\pi r^2 dr = -\frac{KN_a}{RT_0} 4\pi r \frac{dr}{dt}$$

En égalisant les deux expressions du flux (1) et (2) :

$$\frac{4\pi D KN_a}{\delta RT_0} r = -\frac{KN_a}{RT_0} 4\pi r \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{D}{\delta} = -\frac{dr}{dt}$$

$$dr = -\frac{D}{\delta} dt$$

Puis intégration :

$$r_{min} - r_0 = -\frac{D}{\delta} \cdot t$$

$$\int_0^t dt = -\frac{\delta K}{DP_{atm}} \int_{r_0}^{r_{min}} \frac{1}{r} dr$$

$$t = \frac{\delta}{D} (r_0 - r_{min})$$

AN : $t = 2 \times 10^4$ s soit 5h30 environ