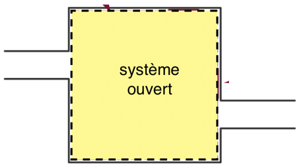
Chauffe-eau solaire

Question simple :

1. Énoncer le premier principe de la thermodynamique pour un système fermé.
2. On considère le système ouvert alimenté par un fluide de masse volumique ρ qui entre et sort avec un débit de masse D_m. Définir un système fermé à partir du système ouvert puis démontrer le premier principe industriel : $D_m(\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p) = P_u + P_{th}$

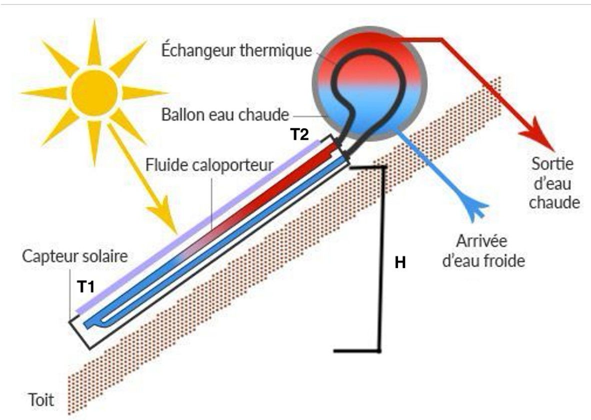


P_u et P_{th} représentent les puissances utiles et thermiques reçues par le fluide.

Question ouverte :

On étude un chauffe-eau solaire.
Il est équipé de trois panneaux solaires de surface totale $S = 6\ m^2$ posés sur la toiture. Ils sont inclinés pour recevoir le rayonnement solaire en incidence normale. La circulation du fluide caloriporteur sous les panneaux est assurée par une puissance motrice : $P_m = D_m \frac{\Delta\rho}{\rho} gH$ où $\frac{\Delta\rho}{\rho} = 0{,}01$ et H une hauteur définie sur le schéma ($H = 0{,}5\ m$). Le débit de masse du fluide caloriporteur vaut $D_m = 180\ kg \cdot h^{-1}$.

T_1 est la température du fluide caloriporteur en bas du dispositif et peut-être assimilée à la température de l'atmosphère. T_2 est la température du fluide caloriporteur à l'entrée du ballon d'eau. Le fluide caloriporteur circule dans le ballon afin de chauffer l'eau qu'il contient grâce à un échangeur thermique. Le ballon d'eau à une capacité de 200 L.



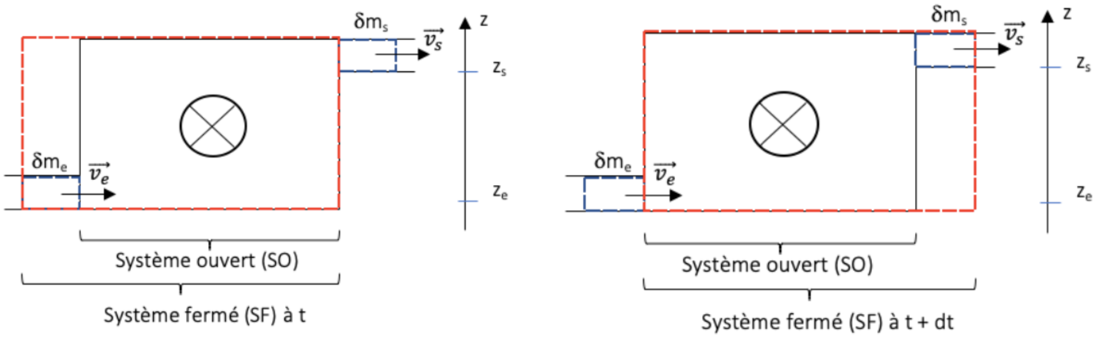
Déterminer le temps au bout duquel un utilisateur peut prendre une douche chaude.

<u>Données</u> :

- Loi de Stefan Stefan-Boltzmann donnant le flux surfacique du corps noir : $\Phi = \sigma T^4$
- Constante de Stefan-Boltzmann : $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$
- Température à la surface du Soleil : $T_{Soleil} = 5778\ K$
- Rayon du Soleil : $R_{Soleil} = 6{,}86\ \times 10^5\ km$
- Distance Terre-Soleil : $D_{Terre-Soleil} = 149{,}6\ \times 10^6\ km$
- Capacité thermique massique du fluide caloriporteur : $c = 3900\ J \cdot\ kg^{-1} \cdot K^{-1}$
- Capacité thermique massique de l'eau liquide : $c' = 4180\ J \cdot\ kg^{-1} \cdot K^{-1}$

Correction question simple

On considère un système ouvert (SO) et une petite masse en entrée notée δm_e dont la réunion constitue un système fermé (SF). On suit l'évolution du SF de t à t + dt pour un écoulement supposé stationnaire.



En régime stationnaire :

- $\delta m_e = \delta\, m_s = \delta m$
- le débit en masse se conserve : $D_{m,e} = D_{m,s} = D_m$
- l'énergie du système ouvert $E_{SO}(t) = E_{SO}(t+dt) = E_{SO}$

Variation de l'énergie totale du système fermé entre t et t+dt :

$$dE_{SF} = dE_c + dE_p + dU = \delta\mathrm{m}\,(\Delta e_c + \Delta e_p + \Delta u)$$

Application du premier principe au système fermé (SF) pour un système en mouvement :

$$dE_{SF} = \delta W_p + \delta W_u + \delta Q$$

Expression du travail des forces pressantes :

$\delta W_{p,e} = -P_e dV_e = +P_e\, \delta V_e = \frac{P_e}{\rho_e}\delta m > 0$

(attention la petite variation de volume dV_e est négative, c'est l'opposé de la petite quantité de volume $\delta V_e :\ dV_e = -\delta V_e$)

$$\delta\mathrm{m}\left(\Delta e_c + \Delta e_p + \Delta u\right) = \frac{P_e}{\rho_e}\delta m - \frac{P_s}{\rho_s}\delta m + \delta W_u + \delta Q$$

Enfin $h = u + \frac{P}{\rho}$

Il vient : $\boldsymbol{D_m(\Delta h + \Delta e_c + \Delta e_p) = P_u + P_{th}}$

Correction question ouverte

Calcul de la puissance thermique fournie par le soleil P_{th} :

$\Phi_{rad,soleil} = \sigma T^4 = 5{,}67 \times 10^{-8} \times 5778^4$

$\Phi_{rad,soleil} = 6{,}3 \times 10^7\ W \cdot m^{-2}$

Toute l'énergie émise par le soleil (rayon R_{soleil}) est reçue dans une sphère de rayon D :

$$4\pi {R_{soleil}}^2 \Phi_{rad,soleil} = 4\pi D^2 \Phi_{Terre}$$

où Φ_{Terre} correspond à l'énergie solaire reçue au niveau de la Terre par seconde et par m²

On a donc : $\Phi_{Terre} = \left(\frac{R_{soleil}}{D}\right)^2 \times \Phi_{rad,soleil}$

Le calcul donne : $\Phi_{Terre} = 1{,}3 \times 10^3\ W \cdot m^{-2}$

La puissance reçue au niveau du panneau solaire de 6 m² : $\boldsymbol{P_{th} = \Phi_{Terre} \times S} = 7{,}8\ \mathrm{k}\,\boldsymbol{W}$

Détermination de T_2 :

On applique le premier principe industriel au fluide caloriporteur **sous le panneau solaire**.
Détermination de la température dans le ballon d'eau chaude T(t) :

$$D_m(\Delta h + \Delta e_c \ + \Delta e_p) = P_m + P_{th}$$

L'AN pour P_m donne $P_m = \frac{180}{3600} \times 0{,}01 \times g \times 0{,}5 = 2 \times 10^{-3}\, W$ donc $P_m \ll P_{th}$
De plus on suppose que le débit et la section étant constante : $\Delta e_c = 0$

$$D_m(\mathrm{c}(T_2 - T_1) + \mathrm{gH}) = P_{th}$$

On isole $T_2 = \left(\frac{P_{th}}{D_m} - gH + cT_1\right)/c$

AN : $\boldsymbol{T_2} = \frac{\left(\frac{7800\times3600}{180} - 9{,}81\times0{,}5 + 3900\times293\right)}{3900} = \mathbf{313}\ \boldsymbol{K}$ **soit 40 °C** (avec H = 0,5 m et T_1= 20 °C)

Détermination du temps de chauffe :

On note P'_{th} la puissance thermique reçue par l'eau du ballon provenant du refroidissement du fluide caloriporteur de T_2 à T(t). On l'exprime en appliquant le premier principe industriel au fluide caloriporteur **dans le ballon d'eau chaude au niveau de l'échangeur thermique**.

$$D_m\mathrm{c}(\mathrm{T(t)} - T_2) = -P'_{th}$$

On applique ensuite le premier principe à l'eau contenue dans le ballon d'eau chaude (m = 200 kg) qui est au repos macroscopique (transformation monobare quasi-statique) :

$$dH = P'_{th} dT$$

$$mc'dT = -D_m\mathrm{c}(\mathrm{T(t)} - T_2)dT$$

$$\frac{dT}{dt} + \frac{D_m\mathrm{c}}{mc'}T(t) = \frac{D_m\mathrm{c}}{mc'}T_2$$

$$\frac{dT}{dt} + \frac{T(t)}{\tau} = \frac{T_2}{\tau}$$

Avec $\tau = \frac{mc\prime}{D_m\mathrm{c}}$

Résolution : $T(t) = (T_1 - T_2)\, e^{-t/\tau} + T_2$
Si on suppose que l'eau doit être à $T_3 = 39\ °C$, on calcule le temps associé :

$$t = \tau \cdot ln\left(\frac{T_1 - T_2}{T_3 - T_2}\right)$$

AN :

$$t = \frac{200 \times 4180 \times 3600}{180 \times 3900} \cdot ln\left(\frac{40}{1}\right)$$

$$t = 1{,}6 \times 10^4\ s$$

$$\boldsymbol{t = 4\ h\ 24}$$