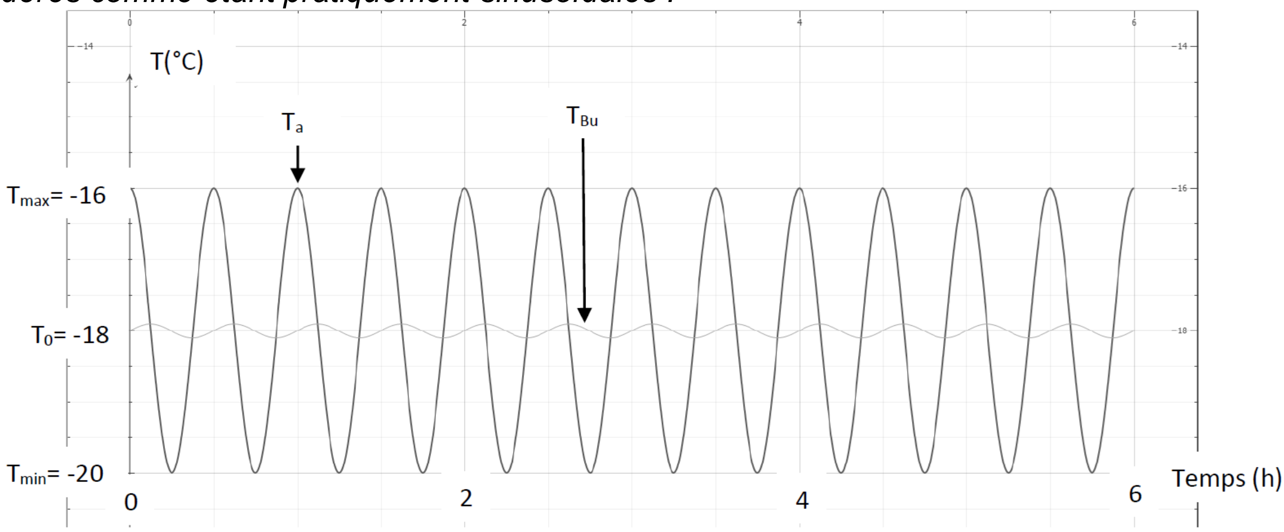
## Question simple

On étudie la conduction thermique radiale dans un matériau d'épaisseur e délimité par deux cylindres coaxiaux de rayons R et R+e et dont la longueur est L. Etablir l'expression de la résistance thermique $R_{th}$ du matériau. La conductivité thermique du matériau sera notée $\lambda$.

## Question ouverte : température d'une bûche glacée dans un congélateur

*Une bûche de Noël en crème glacée, entourée d'un emballage en polystyrène, est placée dans un congélateur dont la température du compartiment interne n'est pas constante dans le temps à cause des cycles marche/arrêt de l'appareil et oscille autour de sa valeur moyenne $T_0$ = -18 °C.*

*Lorsque la température mesurée par le capteur thermostatique dépasse le seuil haut (-16°C), le compresseur de la machine frigorifique démarre et la production de froid fait diminuer la température.*
*Lorsque le capteur thermostatique atteint le seuil bas (-20°C), le compresseur s'arrête et la température remonte à cause des pertes thermiques à travers les parois latérales et la porte jusqu'à atteindre à nouveau le seuil haut pour lequel le compresseur se déclenche à nouveau…. etc…*
*Les courbes d'oscillations temporelles, de la température $T_a(t)$ de l'air du compartiment du congélateur et celle $T_{Bu}(t)$ de la crème glacée à l'intérieur de la bûche, autour de la valeur moyenne $T_0$ sont considérés comme étant pratiquement sinusoïdales :*

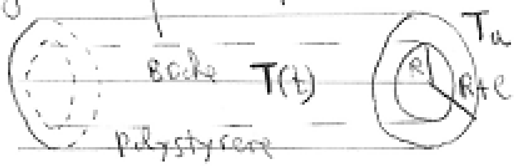



**Proposez un modèle permettant de rendre compte de la loi d'évolution $T_{Bu}(t)$ de la température de la bûche au cours du temps. En étudiant les amplitudes et le déphasage entre les oscillations vérifier la cohérence du modèle avec les courbes de température relevées.**

Pour cette étude vous disposez des valeurs numériques des paramètres pour introduire des hypothèses simplificatrices lors de l'élaboration du modèle.

**Données :**
Conductivité thermique de la crème : $\lambda$ = 0,9 W.m$^{-1}$.K$^{-1}$
Conductivité thermique du polystyrène : $\lambda$ = 0,03 W.m$^{-1}$.K$^{-1}$
Epaisseur de l'emballage : e = 2 cm
Longueur de l'emballage : L = 40 cm
Masse de la bûche : M = 1 kg
Rayon de la bûche : R = 6 cm
Capacité thermique massique de la crème glacée : c = 2 kJ.kg$^{-1}$.K$^{-1}$
Capacité thermique massique du polystyrène : c' = 1,4 kJ.kg$^{-1}$.K$^{-1}$
Masse volumique de la crème glacée : $\rho \cong$ 1 kg.L$^{-1}$
Masse volumique du polystyrène : $\rho'$ = 30 g.L$^{-1}$

1) Modélisation de la bûche par un cylindre et l'emballage par une couronne cylindrique d'épaisseur $e$




Hypothèses :
- Conduction thermique radiale à travers la bûche et le polystyrène en série.

- $R_{th} = \underbrace{R_{th\,bûche}}_{<<} + R_{th\,polystyrène} \simeq R_{th\,polystyrène}$ car $\lambda_{crème} >> \lambda_{polyst.}$

× Calcul de la résistance thermique du polystyrène

$$\phi_{th} = j_{th} \cdot S = -\lambda \frac{dT}{dr} \times 2\pi r L \Leftrightarrow dT = -\frac{\phi_{th}}{2\pi\lambda L}\frac{dr}{r} \Leftrightarrow \Delta T = \frac{\phi_{th}}{2\pi\lambda L}\ln\frac{(R+e)}{R}$$

$$R_{th\,polystyrène} = \frac{1}{2\pi\lambda L}\ln\frac{R+e}{R} = \frac{1}{2\pi\times 0{,}03\times 0{,}1}\ln\frac{0{,}06+0{,}02}{0{,}06} = \underline{3{,}8\ \mathrm{K\,W^{-1}}}$$

2) 1er principe de la thermodynamique appliqué au système bûche + polystyrène

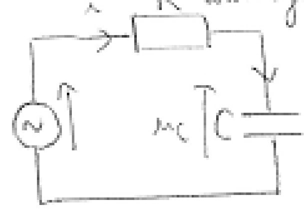
$$dU = \delta Q + \underbrace{\delta W}_{0} \Leftrightarrow m.C\ dT = \phi_{th} \cdot dt = \frac{\Delta T}{R_{th}}dt = \frac{T_a - T(t)}{R_{th}}dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{1}{mCR_{th}}T = \frac{1}{mCR_{th}}T_a(t)$$ avec $T_a(t) = T_0 + A_m\cos wt$ (cf document)

$$\Leftrightarrow \frac{d(T-T_0)}{dt} + \underbrace{\frac{1}{mCR_{th}}}_{=\frac{1}{\tau}}(T-T_0) = \frac{A_m}{mCR_{th}}\cos wt \quad (1)$$

($T_0$ : cte)

analogue à l'équation différentielle vérifiée par un circuit RC en régime sinusoïdal forcé




$$e - Ri - u_C = 0$$
$$e - RC\frac{du_C}{dt} - u_C = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{e(t)}{RC} \quad (2)$$

3) Résolution du régime sinusoïdal forcé en notation complexe pour (2)

$$\Rightarrow \underline{u_C} = \frac{1/jCw}{R + \frac{1}{jCw}}\underline{e} = \frac{1}{1+jRCw}\underline{e}$$

Par analogie la résolution de (1) conduit à $(\underline{T} - T_0) = \dfrac{A_m e^{jwt}}{1 + jR_{th}mCw}$

$$\Rightarrow \text{amplitude de } T(t) - T_0 = \frac{A_m}{\sqrt{1 + R_{th}^2 m^2 C^2 w^2}}$$

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{0{,}5\times 3600} = 3{,}5\cdot 10^{-3}\ \mathrm{rad\,s^{-1}}$$

$\Rightarrow$ amplitude de la variation de température de la bûche :

$$\frac{A_m}{\sqrt{1+(3{,}8)^2 \cdot 1^2 (2\cdot 10^3)^2 (3{,}5\cdot 10^{-3})^2}} = \frac{A_m}{27} \ll A_m \Rightarrow T_{bûche}(t) \text{ reste proche de } T_0$$

cohérent avec la courbe $T_{Bu}(t)$ d'amplitude faible devant celle de $T_{air}(t)$

<u>Hyp</u> : $m\,C$ polystyrène $\ll m\,C$ bûche

On remarque un déphasage retard entre $T_{Bu}(t)$ et $T_{air}(t)$.

Il est donné par $\arg(\underline{T}-T_0) - \arg A_m e^{j\omega t} = -\arg(1+j\,R_{th}\,m\,C\,\omega)$

$\Rightarrow \tan \varphi_{T_{Bu}/T_{air}} = -R_{th}\,m\,C\,\omega = -3{,}8 \times 1 \times 2\cdot 10^3 \times 3{,}5\cdot 10^{-3} = -26{,}6$

Déphasage $\varphi = -88° \simeq -90° \Leftrightarrow T_{Bu}$ en quadrature retard en accord avec les courbes

| **<u>Grille d'évaluation</u> : Température à l'intérieur d'une bûche glacée** | | **+** | **–** |
|---|---|---|---|
| **Analyser et s'approprier le problème (4 points)** | | | |
| Savoir exploiter les informations<br><br>Savoir choisir les domaines de concepts physiques et les notions utiles | -Modélisation de la bûche par un cylindre conducteur thermique et de l'emballage par une couronne cylindrique conductrice<br>-Transport thermique et thermodynamique.<br>-Régime sinusoïdal forcé. | | |
| Savoir poser un problème | -Evaluation de la résistance thermique en symétrie cylindrique.<br>-Application du premier principe. | | |
| **Mise en place d'une stratégie de résolution (9 points)** | | | |
| Construire un modèle | -Conduction thermique radiale en régime permanent selon la loi de Fourier.<br>-Premier principe appliqué à une phase condensée. | | |
| Introduire les paramètres physiques pertinents | - Température T(t) au cœur de la bûche<br>- Température ambiante $T_0+A_m\cos\omega t$<br>- Résistances thermiques de la bûche et du polystyrène<br>- Conductivité thermique et capacité thermique | | |
| Introduire des simplifications pertinentes | -Régime permanent<br>-Masse du polystyrène << Masse de la bûche => capacité thermique du polystyrène négligeable.<br>$\lambda_{\text{polystyrène}} << \lambda_{\text{bûche}} \Rightarrow R_{\text{th(bûche)}} << R_{\text{th(polystyrène)}}$ | | |
| Maîtriser les lois physiques et leurs domaines d'application | -Loi de Fourier et flux thermique<br>-Définition de la résistance thermique<br>-Calcul de la résistance thermique en symétrie cylindrique<br>-Premier principe appliqué aux échanges thermiques<br>-Relation tension-courant aux bornes d'un dipôle<br>-Loi des mailles | | |
| Choix et maîtrise des outils mathématiques | -Propriétés de la symétrie radiale cylindrique<br>-Intégration de la loi de Fourier<br>-Ecriture différentielle du premier principe<br>-Résolution d'une équation différentielle en notation complexe ; utilisation du module et de l' argument<br>-Savoir interpréter une amplitude et un déphasage entre deux grandeurs sinusoïdales sur un graphe.<br>-Etablir l'analogie entre paramètres thermiques et électriques | | |
| Savoir réaliser efficacement les calculs analytiques et l'application numérique | -Obtention de la grandeur complexe, de son module et de son argument.<br>-A.N. avec unités | | |
| **Faire une analyse critique de la démarche (4 points)** | | | |
| Critique du modèle | -Relier les résultats des calculs d'amplitudes et déphasages aux allures des courbes<br><br>-Commentaires<br><br>-Limites du modèle (variations non sinusoïdales de T, phénomènes de convection négligés) | | |
| **Interagir et communiquer (3 points)** | | | |
| | Clarté de l'exposé. | | |
| | Capacité de réponse aux questions de l'examinateur. | | |
| | Capacité d'écoute | | |
| | Capacité d'exploitation des informations et documents fournis par l'examinateur. | | |