Expérience de Stokes

En 1851, George Gabriel Stokes (1819-1903), après avoir étudié le mouvement de pendule dans différents fluides propose ce qui va devenir la loi de Stokes. Cette loi donne la force de traînée hydrodynamique s'exerçant sur une sphère en déplacement dans un fluide à bas nombre de Reynolds (très inférieur à 1) et si la sphère est suffisamment loin de tout autre corps, de tout obstacle ou paroi latérale (on considère une paroi éloignée d'au moins dix fois le rayon de la sphère). Dans ce cas, la force de traînée hydrodynamique s'écrit :

$$\vec{\boldsymbol{F}} = -6\boldsymbol{\pi\eta R}\vec{\boldsymbol{V}}$$

où η est la viscosité dynamique du fluide (en Pa s), R le rayon de la sphère et $\vec{V}$ la vitesse de la sphère. Cette loi a permis par la suite la détermination de grandeurs fondamentales, telles que la charge d'un électron, le nombre d'Avogadro ou encore la constante de Boltzmann.

Question simple

Données :	Viscosité de l'eau à 20°C	$\eta = 1{,}0 \times 10^{-3}\ Pa \cdot s$ à 20°C
	Masse volumique de l'eau	$\mu_0 = 1{,}0\ \times 10^3\ kg \cdot m^{-3}$
	Masse volumique de la bille	$\mu_b = 2{,}6\ \times 10^3\ kg \cdot m^{-3}$
	Rayon de la bille	$R = 1{,}0\ \mu m$

1) Etablir l'équation différentielle de la vitesse d'une bille sphérique lâchée dans la colonne d'eau de hauteur $H_0 = 30\ cm$ sans vitesse initiale dans le régime de Stokes. On fera apparaître un temps caractéristique τ dont on donnera l'expression et la valeur numérique.

2) Résoudre l'équation différentielle et donner l'expression de la vitesse de la bille fonction du temps.

3) Donner l'expression de la vitesse limite atteinte par la bille. Réalisez l'application numérique.

Question ouverte

1) On souhaite déterminer le rayon moyen de particules d'argiles dont la masse volumique est : $\mu_{argile} = 1{,}5\ \times 10^3\ kg \cdot m^{-3}$. On indique que le rayon de ces particules est au plus d'1,0 μm. Dans ce but, celles-ci sont abandonnées, à $\theta_0 = 25°C$, dans une colonne d'eau cylindrique de hauteur $H_0 = 30\ cm$ et de rayon $R_0 = 4{,}0\ cm$. Un régime stationnaire est rapidement atteint. Des techniques optiques permettent de mesurer la concentration en argiles (exprimée en $particules \cdot m^{-3}$) à différentes hauteurs depuis la base de la colonne d'eau. On constate que $C(z = 0) = 2 \times C(z = 2\ cm)$ en prenant un axe Oz vertical ascendant avec l'origine au fond du récipient.

Déterminer le rayon *R* des particules d'argile

2) La colonne d'eau, initialement à la température $\theta_0 = 25°C$, est à présent laissée pendant 4h exposée au rayonnement lumineux solaire.

Les particules d'argile sont-elles déplacées dans la colonne d'eau ?

Document 1 : Coefficient de diffusion

Le loi de Sokes-Einstein donne le coefficient de diffusion en $m^2 \cdot s^{-1}$ d'une sphère de rayon R dans un liquide de viscosité η à une température T :

$$D = \frac{k_B T}{6\pi\eta R}$$

Où $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\ J \cdot K^{-1}$ est la constante de Boltzmann

Document 2 : Loi de Stefan-Boltzmann

Loi de Stefan-Boltzmann donnant le flux radiatif émis par unité de surface d'un corps noir en fonction de sa température : $\Phi_{rad} = \sigma T^4$ où $\sigma = 5{,}67 \times 10^{-8}\ W \cdot m^{-2} \cdot K^{-4}$ est la constante de Stefan-Boltzmann

Document 3 : Données

Température à la surface du Soleil :	$T_{Soleil} = 5778\ K$
Rayon du Soleil :	$R_{Soleil} = 6{,}86\ \times 10^5\ km$
Distance Terre-Soleil :	$D_{Terre-Soleil} = 149{,}6\ \times 10^6\ km$
Capacité thermique massique de l'eau liquide	$c = 4180\ kJ \cdot\ kg^{-1} \cdot K^{-1}$

Expérience de Stokes

Question simple

1) **Référentiel :** Terrestre (galiléen)
Système : bille sphérique
Forces extérieures (V étant le volume d'une bille):

-Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = \mu_b V\vec{g} =$ $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

-Force de frottement : $\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$

-Poussée d'Archimède : $\vec{\Pi} = -m_f\vec{g} = -\mu_0 V\vec{g} = -\mu_0\frac{m}{\mu_b}\vec{g} = -\frac{\mu_0}{\mu_b}m\vec{g}$

En appliquant le principal fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m\vec{g} - \frac{\mu_0}{\mu_b}m\vec{g} - 6\pi\eta R\vec{v} \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \frac{\mu_0}{\mu_b}m\vec{g} - 6\pi\eta R\vec{v}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{6\pi\eta R}{m}\vec{v} = \left(1 - \frac{\mu_0}{\mu_b}\right)\vec{g} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{d\vec{v}}{dt}} + \boldsymbol{\frac{9\eta}{2R^2\mu_b}\vec{v}} = \left(1 - \boldsymbol{\frac{\mu_0}{\mu_b}}\right)\boldsymbol{\vec{g}} \Rightarrow \boldsymbol{\frac{d\vec{v}}{dt}} + \boldsymbol{\frac{\vec{v}}{\tau}} = \left(1 - \boldsymbol{\frac{\mu_0}{\mu_b}}\right)\boldsymbol{\vec{g}} \qquad \text{avec } \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\frac{2R^2\mu_b}{9\eta}}$$

AN : $\boldsymbol{\tau} = 5{,}8 \times 10^{-7}\ \boldsymbol{s}$: le régime stationnaire est atteint très rapidement ($5\ \tau$)

2) La solution de cette équation différentielle s'écrit : $\vec{v} = \vec{K}\,exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \tau\left(1 - \frac{\mu_0}{\mu_b}\right)\vec{g}$
A t=0, $\vec{v} = \vec{0} \Longrightarrow \vec{K} = -\tau\left(1 - \frac{\mu_0}{\mu_b}\right)\vec{g}$
La solution s'écrit : $\boldsymbol{\vec{v}} = \boldsymbol{\tau}\left(1 - \boldsymbol{\frac{\mu_0}{\mu_b}}\right)\boldsymbol{\vec{g}} \times \left(1 - \boldsymbol{exp}\left(-\boldsymbol{\frac{t}{\tau}}\right)\right)$ avec $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\frac{2R^2\mu_b}{9\eta}}$

3) Donner l'expression de la vitesse limite atteinte par la bille. Réalisez l'application numérique.
Lorsque $t \rightarrow +\infty$, la vitesse limite est atteinte : $\overrightarrow{\boldsymbol{v_{lim}}} = \boldsymbol{\tau}\left(1 - \boldsymbol{\frac{\mu_0}{\mu_b}}\right)\boldsymbol{\vec{g}} = \boldsymbol{\frac{2R^2\mu_b}{9\eta}}\left(1 - \boldsymbol{\frac{\mu_0}{\mu_b}}\right)\boldsymbol{\vec{g}}$
AN : $\boldsymbol{v_{lim}} = 3{,}5 \times 10^{-6}\boldsymbol{m \cdot s^{-1}}$

Remarque : on peut faire calculer le nombre de Reynolds et vérifier que l'écoulement est bien rampant

Question ouverte

1) Les particules d'argile vont être soumis au phénomène de sédimentation, la vitesse de sédimentation étant atteinte très vite (voir question simple). Une inhomogénéité de concentration de particules va alors s'installer dans la colonne d'eau, et un flux diffusif va se produire dans le sens inverse du flux de sédimentation. En régime stationnaire, ces deux flux sont égaux.

Flux de sédimentation : $\boldsymbol{\Phi_{sed}} = \boldsymbol{\frac{\delta N_{sed}}{dt}} = \boldsymbol{\frac{(v_{lim}dt) \times S \times C}{dt}} = \boldsymbol{v_{lim} \times S \times C(z)}$ à une hauteur z

les particules traversant, pendant un temps dt, une section S de la colonne d'eau, se situent dans un cylindre de section S et de hauteur $v_{lim}dt$

Flux diffusif (loi de Fick) : $\boldsymbol{\Phi_{diff}} = \boldsymbol{-DS\frac{dn^*}{dz}} = \boldsymbol{-DS\frac{dC}{dz}}$

En régime stationnaire : $v_{lim} \times S \times C(z) = -DS\frac{dC}{dz} \Longrightarrow \frac{dC}{dz} + \frac{v_{lim}}{D}C(z) = 0$

$$\Rightarrow \frac{dC}{dz} + \frac{\frac{2R^2\mu_{argile}}{9\eta}\left(1-\frac{\mu_0}{\mu_{argile}}\right)g}{\frac{k_BT}{6\pi\eta R}} C(z) = 0 \Rightarrow \frac{dC}{dz} + \frac{4\pi R^3 g}{3k_BT}(\mu_{argile}-\mu_0)C(z) = 0$$

$\Rightarrow \boldsymbol{\frac{dC}{dz}} + \boldsymbol{\frac{C(z)}{H}} = 0$ avec $\boldsymbol{H} = \frac{3\boldsymbol{k_BT}}{4\boldsymbol{\pi R^3 g}\times(\boldsymbol{\mu_{argile}}-\boldsymbol{\mu_0})}$

La résolution de l'équation différentielle donne : $C(z) = C(z=0) \times exp\left(-\frac{z}{H}\right)$

La hauteur pour laquelle la concentration en argiles est divisée par deux s'écrit :

$$C(z=z_{1/2}) = \frac{C(z=0)}{2} \Rightarrow C(z=0) \times exp\left(-\frac{z_{1/2}}{H}\right) = \frac{C(z=0)}{2} \Rightarrow exp\left(-\frac{z_{1/2}}{H}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{z_{1/2}}{H} = ln2 \Rightarrow z_{1/2} = H \times \ln(2)$$

$$\Rightarrow H = \frac{z_{1/2}}{ln2} \Rightarrow \frac{3k_BT}{4\pi R^3 g \times (\mu_{argile}-\mu_0)} = \frac{z_{1/2}}{ln\,2} \Rightarrow \boldsymbol{R} = \left(\frac{\boldsymbol{ln}\,2}{\boldsymbol{z_{1/2}}} \times \frac{3\boldsymbol{k_BT}}{4\boldsymbol{\pi g} \times (\boldsymbol{\mu_{argile}}-\boldsymbol{\mu_0})}\right)^{\frac{1}{3}}$$

AN : $\boldsymbol{R} = 1{,}9 \times 10^{-8}\boldsymbol{m} = 19\ \boldsymbol{nm}$

Remarque : on néglige dans ce modèle le phénomène de **convection**

2) On voit que la hauteur caractéristique H (question 1) dépend de la température. On va estimer la température finale atteinte par la colonne d'eau si celle-ci est laissée 4h au soleil, et ensuite voir si cela peut avoir une influence sur H.

$\Phi_{rad,soleil} = \sigma T^4 = 5{,}67 \times 10^{-8} \times 5778^4 = 6{,}3 \times 10^7\ W \cdot m^{-2}$

Toute l'énergie émise par le soleil (rayon R_{soleil}) est reçue dans une sphère de rayon D :

$4\pi {R_{soleil}}^2 \Phi_{rad,soleil} = 4\pi D^2 \Phi_{Terre}$

où Φ_{Terre} correspond à l'énergie solaire reçue au niveau de la Terre par seconde et par m^2

On a donc : $\Phi_{Terre} = \left(\frac{R_{soleil}}{D}\right)^2 \times \Phi_{rad,soleil}$

Le calcul donne : $\Phi_{Terre} = 1{,}3 \times 10^3\ W \cdot m^{-2}$

La puissance reçue au niveau de la colonne d'eau, en supposant que cette énergie est reçue sur la face du haut :

$\boldsymbol{P_{colonne}} = \boldsymbol{\Phi_{Terre}} \times \boldsymbol{\pi {R_0}^2} = 6{,}7\ \boldsymbol{W}$

Estimation de la variation de température de la colonne d'eau en $\Delta t = 4h$:

Si on néglige toute perte : $\Delta H = mc\Delta T = E_{colonne} \Rightarrow \boldsymbol{\Delta T} = \frac{\boldsymbol{E_{colonne}}\times\boldsymbol{\Delta t}}{\boldsymbol{mc}} = \frac{\boldsymbol{E_{colonne}}\times\boldsymbol{\Delta t}}{\boldsymbol{\pi {R_0}^2 H_0 \mu_0 c}}$

AN : $\boldsymbol{\Delta T} = \frac{6{,}7\times4\times3600}{\boldsymbol{\pi}\times0{,}04^2\times0{,}30\times1000\times4180} = 15\ \boldsymbol{K} \Rightarrow \boldsymbol{\theta_f} = 40°\boldsymbol{C}$

Or la hauteur caractéristique s'écrit : $H = \frac{3k_BT}{4\pi R^3 g\times(\mu_{argile}-\mu_0)}$

Elle devient à la nouvelle température : $H(\theta = \theta_f) = \frac{T_0}{T_f} H(\theta = \theta_0)$

Or la hauteur pour laquelle la concentration en argiles est divisée par 2 s'écrit : $z_{1/2} = H \times \ln(2)$

$$\Rightarrow z_{1/2}(\boldsymbol{\theta_f}) = \frac{T_0}{T_f} z_{1/2}(\boldsymbol{\theta_0}) = 0{,}95 z_{1/2}(\boldsymbol{\theta_0}) = 1{,}9\ \boldsymbol{cm}$$

Les particules sont donc légèrement déplacées vers le bas de la colonne d'eau