Lancer de poids

Un athlète lance un poids d'une hauteur de 2m, avec un angle α = 45° par rapport à l'horizontale et avec une vitesse initiale de 15 $m.s^{-1}$. Le record du monde du lancer de poids en extérieur est détenu chez les hommes par Ryan Crouser, avec un jet à 23,56 m établi à Los Angeles le 27 mai 2023.

Question simple

- Enoncer la seconde loi de Newton
- Donner l'équation de la trajectoire du poids
- Calculer numériquement le temps auquel la hauteur du poids est maximale. Calculer numériquement la portée.

Question ouverte

A l'aide des documents fournis, déterminer si l'angle α = 45° est l'angle pour lequel le lancer est le meilleur. Discuter du modèle de chute libre pour décrire le mouvement.

Vous répondrez aux différentes questions posées éventuellement dans les documents

Document 1 : script python à compléter, méthode dichotomique

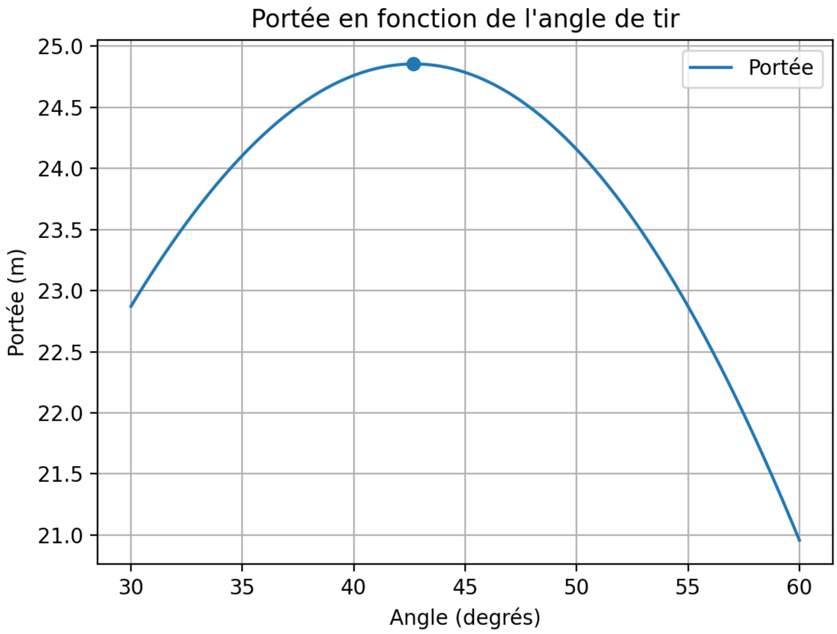
- Compléter la **ligne 12** qui définit la fonction dont on cherchera le « zéro » en appliquant une méthode dichotomique
- Compléter la **ligne 29** qui permet de calculer la valeur de la portée
- Expliquer l'instruction à la **ligne 32** : np.linspace(30,60,200)
- Compléter la **ligne 45** pour définir les listes à utiliser dans la commande plot afin de tracer le graphique du document 2.

```
1  import numpy as np
2  import matplotlib.pyplot as plt
3  from scipy.optimize import bisect
4
5  # Constantes physiques
6  g = 9.81        # gravité (m/s²)
7  v0 = 15.0       # vitesse initiale (m/s)
8  H = 2.0         # hauteur initiale (m)
9
10 # Fonction position verticale
11 def y(t, alpha):
12     return A COMPLETER
13
14 # Fonction pour trouver le temps d'impact avec bisect
15 def temps_impact(alpha):
16     t_min = 0
17     t_max = 2
18
19     # On ajuste t_max pour garantir un changement de signe
20     while y(t_max, alpha) > 0:
21         t_max *= 2
22
23     # Utilisation de bisect
24     return bisect(lambda t: y(t, alpha), t_min, t_max)
25
26 # Calcul de la portée
27 def portee(alpha):
28     t = temps_impact(alpha)
29     return A COMPLETER
30
31 # Génération des angles
32 angles_deg = np.linspace(30, 60, 200)
33 angles_rad = np.radians(angles_deg)
34
35 # Calcul des portées
36 portees = [portee(a) for a in angles_rad]
37
38 # Recherche de l'angle optimal
39 indice_max = np.argmax(portees)
40 angle_opt = angles_deg[indice_max]
41 portee_max = portees[indice_max]
42
43 # Affichage
44 plt.figure()
45 plt.plot(A COMPLETER, A COMPLETER, label="Portée")
46 plt.scatter(angle_opt, portee_max)
47 plt.xlabel("Angle (degrés)")
48 plt.ylabel("Portée (m)")
49 plt.title("Portée en fonction de l'angle de tir")
50 plt.grid()
51 plt.legend()
52 plt.show()
```

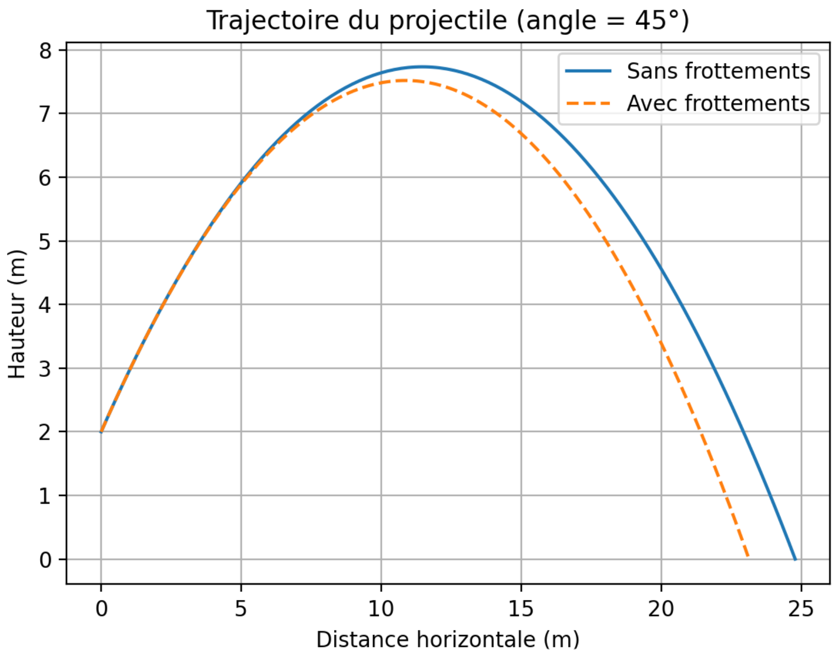
*La commande **bisect** opère par dichotomie. Sa syntaxe s'écrit **bisect(fonction,borne_inf,borne_sup).***
Pour que celle-ci fonctionne, il est nécessaire de :

- *définir préalablement une fonction*
- *préciser un intervalle [a,] à l'intérieur duquel rechercher la racine de f (il faut que f(a) et f(b) soient de signes opposés*

Document 2 : courbe tracée par le programme Python donné dans le document 1



Document 3 : courbes de la trajectoire avec et sans frottement



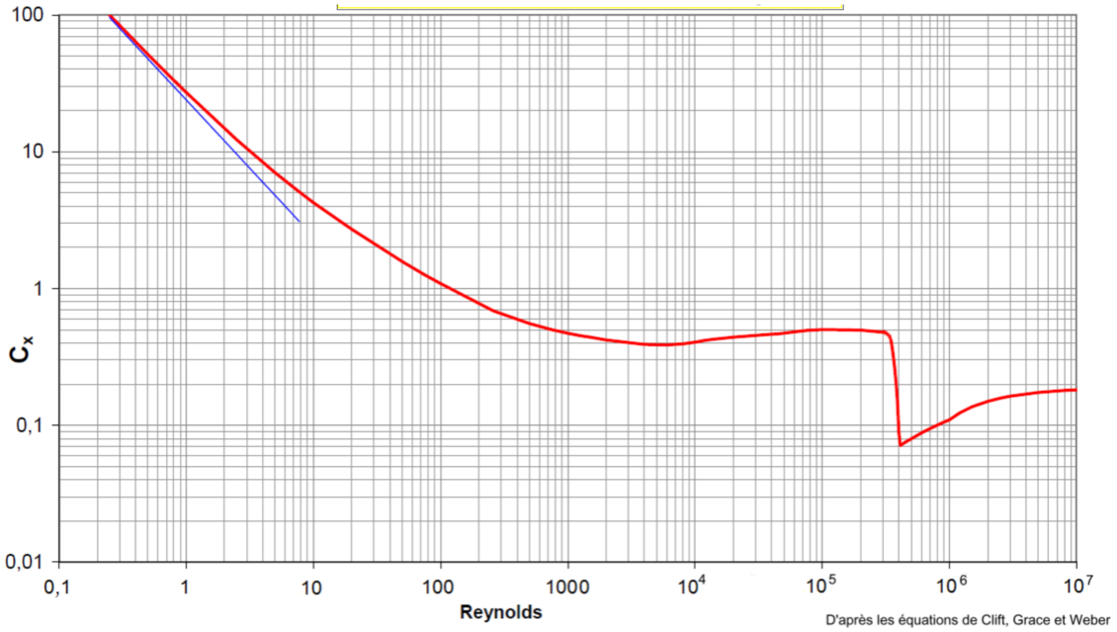
L'action de l'air a été modélisée par une force de frottement quadratique : $\left\|\vec{f}\right\| = k\ v^2$, avec v la vitesse et k = 0,004 kg.m^{-1}.

En exploitant le document 4, justifier la valeur numérique choisie pour la constante k, sachant que le diamètre des poids utilisés en compétition est de 130 mm.

Document 4 : force de trainée

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\,\rho\, S\, C_x\, v\, \vec{v} \quad \text{avec}$$

ρ : masse volumique du fluide
S : surface frontale ($S = \pi R^2$; R : rayon de la sphère)
v = vitesse de la sphère
Cx : coefficient de trainée



Données à 293 K sous 1 bar

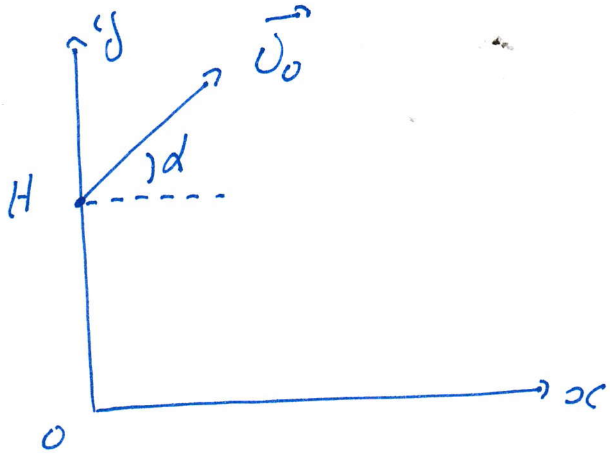
Masse volumique de l'air : $\rho_{air} = 1{,}2\ kg.m^{-3}$

Viscosité dynamique de l'air : $\eta_{air} = 1{,}8\ 10^{-5}$ Pl

Correction : Lancer de poids

Question simple

Référentiel terrestre considéré galiléen
repère : (O, x, y)
$\{ M(m) \}$
Force : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_y}$



PFD : $m\vec{a} = \vec{P} \Rightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = cte = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha \cdot t \\ y(t) = -\frac{1}{2} g t^2 + v_0 \sin\alpha \, t + H \end{cases}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha} \right)^2 + v_0 \sin\alpha \left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha} \right) + H$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + x \tan\alpha + H$$: équation de la trajectoire.

- Hauteur maximale au temps t_m : $\dot{y}(t_m) = 0 \Rightarrow t_m = \frac{v_0 \sin\alpha}{g}$

- portée : soit x_p : $y(x_p) = 0$

$$\Delta = \tan^2\alpha + \frac{2gH}{v_0^2 \cos^2\alpha}$$

$$x_p = \frac{-\tan\alpha - \sqrt{\Delta}}{-\frac{g}{v_0^2 \cos^2\alpha}}$$

AN : $\Delta = 1,35$

$\boxed{x_p = 24,8 \text{ m}}$

Question ouverte

- D'après le document 2 la portée est maximale pour un angle $\alpha = 42,7°$

- Réponses au document 1
  - ligne 12 : return $H + v_0 \sin\alpha\, t - 0,5\, g\, t^2$
  - ligne 29 : return $v_0 \cos\alpha\, t$
  - ligne 32 : créé une liste de 200 nombres régulièrement espacés entre 30 et 60
  - ligne 45 : plt.plot(angles_deg, portees, label="Portée").

- Le modèle de chute libre surestime la portée (supérieure au record enregistré)

$\Rightarrow$ modélisation avec force de traînée : $\|\vec{F}\| = \frac{1}{2}\rho \pi R^2 C_x v^2$

$R_e = \dfrac{2Ru}{\eta/\rho}$ AN : $R_e(u = v_0) = 1,3.10^5$

$R_e(u = v_0 \cos\alpha) = 9.10^4$

vitesse minimale modèle chute libre

$\Rightarrow$ on se trouve donc dans le domaine de Newton : $C_x = 0,445$.

Posons $K = \frac{1}{2}\rho \pi R^2 C_x$ AN : $K = 3,5.10^{-3}\ kg.m^{-1}$.

Doc 3 : le modèle avec frottement permet de retrouver une valeur proche du record du monde (portée = 23,2 m)

Remarque : la valeur de α pour laquelle la portée est maximale n'est pas la même dans le cas d'un modèle avec frottements