

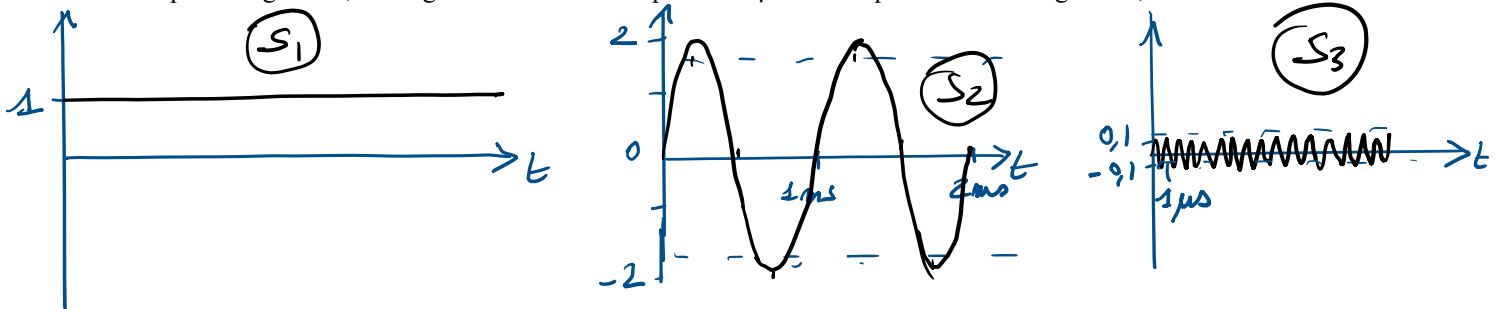
TD Physique n°1 : Filtrage linéaire d'un signal - correction

Exercice 1 : Mesure de pression artérielle

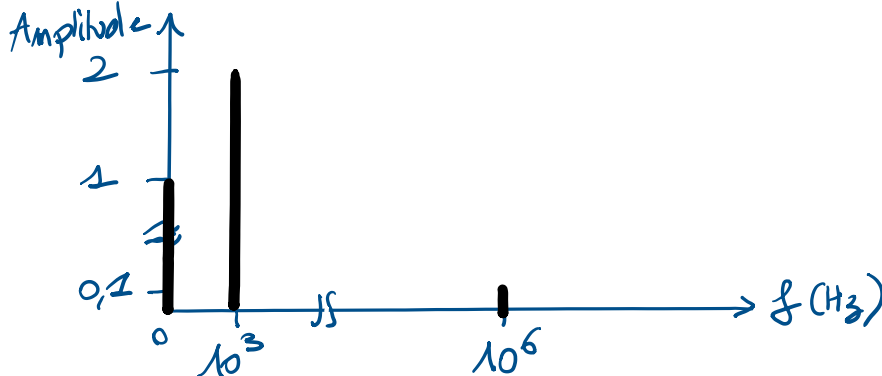
- La pression artérielle systolique correspond à la pression artérielle maximale mesurée : $\Delta P_{a,sys} \approx 120 \text{ mmHg}$
La pression artérielle diastolique correspond à la pression artérielle minimale mesurée : $\Delta P_{a,dia} \approx 80 \text{ mmHg}$
 $\Delta P_{a,moy} = \frac{\Delta P_{a,sys} + 2\Delta P_{a,dia}}{3} = 96 \text{ mmHg}$. Sur une période du signal de la mesure de la pression artérielle en fonction du temps ($\approx 1\text{s}$), la phase systolique dure approximativement deux fois moins de temps que la phase diastolique, ce qui justifie la formule utilisée pour déterminer la pression artérielle moyenne.
- $f = \frac{1}{T}$ avec $T \approx 1\text{s}$ (par battement), on en déduit $f \approx 1 \text{ battements} \cdot \text{s}^{-1} = 60 \text{ battements} \cdot \text{min}^{-1}$.
- $D_V = \frac{V_1}{\Delta t_{\text{battement}}} = \frac{V_1}{T} = V_1 \times f \Rightarrow V_1 = \frac{D_V}{f}$ l'AN donne : $V_1 = \frac{5,0}{60} = 8,3 \times 10^{-2} \text{ L} = 83 \text{ mL}$
- Si le spectre de la pression artérielle ne contenait pas d'harmonique, le signal de la mesure de la pression artérielle en fonction du temps serait une constante (correspondante à la valeur moyenne). Par conséquent le spectre contient des harmoniques.
- Si l'on désire déterminer la pression artérielle moyenne (fréquence nulle), il faut supprimer tous les harmoniques donc appliquer un filtre passe-bas. Il faudrait une fréquence de coupure (si l'on suppose le filtre idéal) comprise entre 0 Hz et la fréquence du fondamental (ou harmonique de rang 1) soit 1 Hz.

Exercice 2 : Filtrage d'un signal

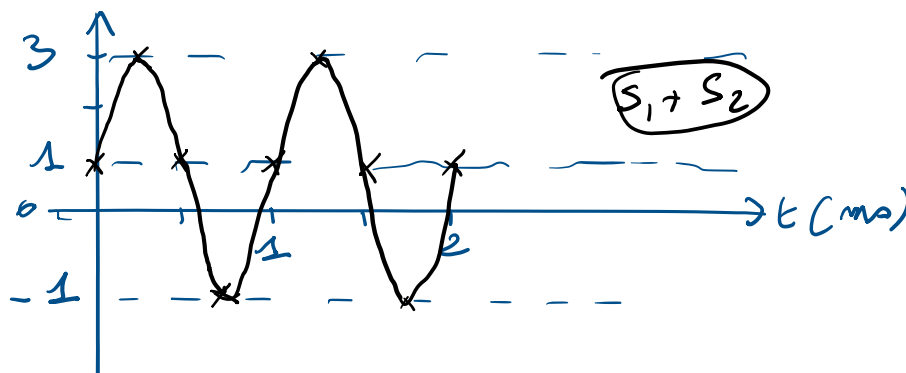
- Ce signal est la somme de trois signaux, un signal S_1 de valeur constante égale à 1, un signal S_2 sinusoïdal de période 1 ms et d'amplitude égale à 2, et 1 signal S_3 sinusoïdal de période 1 μs et d'amplitude environ égale à 0,1 :



Le spectre de ce signal est donc le suivant :



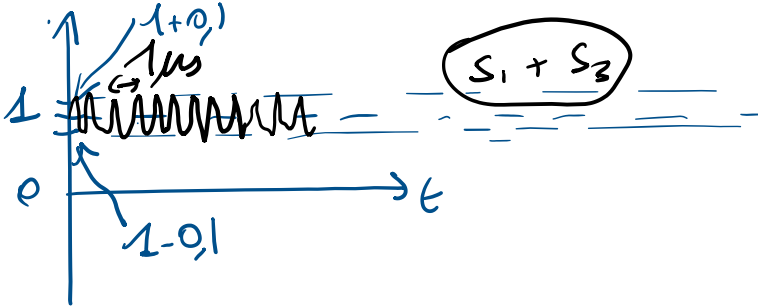
- A la sortie du **filtre passe-bas de fréquence de coupure 10 kHz**, le signal S_3 est coupé. En sortie de filtre, on obtient un signal somme des signaux S_1 et S_2 (si les amplitudes ne sont pas modifiées) :



A la sortie du **filtre passe-haut de fréquence de coupure 10 kHz**, les signaux S_1 et S_2 sont coupés. En sortie de filtre, on obtient le **signal S_3** (si les amplitudes ne sont pas modifiées)

A la sortie du **filtre passe-bande de fréquence centrale 1,0 kHz bande-passante 100 Hz**, les signaux S_1 et S_3 sont coupés. En sortie de filtre, on obtient le **signal S_2** (si les amplitudes ne sont pas modifiées) :

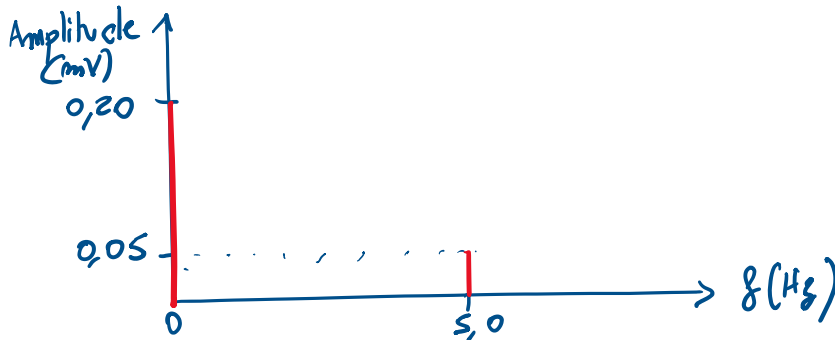
A la sortie du **filtre coupe-bande de fréquence centrale 1,0 kHz bande-passante 100 Hz**, le signal S_2 est coupé. En sortie de filtre, on obtient un signal somme des signaux S_1 et S_3 (si les amplitudes ne sont pas modifiées) :



Exercice 3 : Indicateur de suivi pH-métrique et de la régulation du pH

- Pont diviseur de tension : $e = E \times \frac{R_V}{R_V + r}$ AN : $e = 1,8 \times 10^{-2} \text{ mV}$
On souhaite : $\frac{e}{E} \geq 0,9 \Rightarrow \frac{R_V}{R_V + r} \geq 0,9 \Rightarrow R_V \geq 0,9 \times R_V + 0,9 \times r \Rightarrow 0,1 \times R_V \geq 0,9 \times r$
 $\Rightarrow R_V \geq 9 \times r = 90 \text{ M}\Omega$
- Le signal de la figure 6 se décompose comme la somme d'un signal constant et égal à 0,20 mV (composante continue) et d'une sinusoïde d'amplitude 0,05 mV et de fréquence : $f_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{1,41/7} = 5,0 \text{ Hz}$ (fondamental ou harmonique de rang 1)
 $A_1 = 0,20 \text{ mV}$ $A_2 = 0,05 \text{ mV}$ $\omega_1 = 2\pi f_1 = 31 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Le spectre associé est le suivant :



- RSF $\rightarrow$ complexes

$$\text{LDM : } \underline{u_e} = \underline{u_R} + \underline{u_s}$$

$$\text{Loi d'Ohm : } \underline{u_e} = R \underline{i} + \underline{u_s}$$

$$\text{Loi sur C : } \underline{i} = jC\omega \underline{u_s} \Rightarrow \underline{u_e} = \underline{u_s} + jRC\omega \underline{u_s}$$

$$\Rightarrow \underline{u_e} = (1 + jRC\omega) \underline{u_s} \Rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

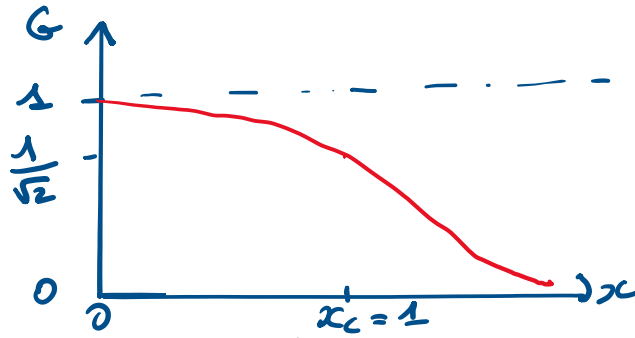
$$\text{Par identification : } H_0 = 1 \quad \text{et} \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$4. \quad G = [\underline{H}] = \left[\frac{1}{1+jx} \right] = \frac{[1]}{[1+jx]} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = H_0 = G_{\max} = 1$$

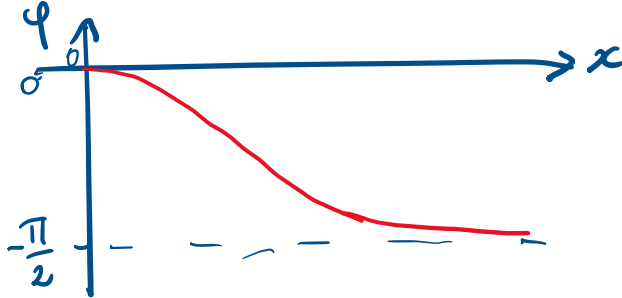
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$$

Filtre passe-bas



$$\varphi(x) = \arg(\underline{H}) = \arg\left(\frac{1}{1+jx}\right) = \arg(1) - \arg(1+jx) = -\arctan(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\frac{\pi}{2}$$



$$5. \quad G(x_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x_c^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1+x_c^2 = 2 \Rightarrow x_c^2 = 1 \Rightarrow x_c = 1 \Rightarrow \omega_c = \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$6. \quad \text{Le régime est un régime sinusoïdal forcé donc } \omega'_2 = \omega_1 = 31 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

Pour déterminer A'_1 et A'_2 , on va traiter le devenir de chacune des composantes du signal d'entrée :

$$A'_1 = A_1 \times G(x=0) = A_1 \times 1 = A_1 = 0,20 \text{ mV}$$

$$A'_2 = A_2 \times G(x=x_1) = A_2 \times \frac{1}{\sqrt{1+(x_1)^2}}$$

$$\text{Avec : } x_1 = \frac{\omega_1}{\omega_0} = RC\omega_1 \quad \text{AN : } x_1 = 10$$

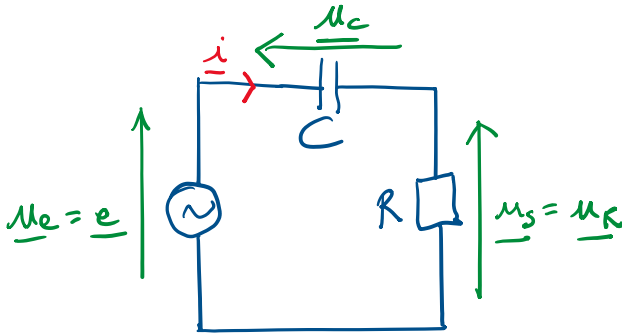
$$\Rightarrow A'_2 = 5,0 \times 10^{-3} \text{ mV} \approx \frac{A'_1}{40} \quad \text{alors que } A_2 \approx \frac{A_1}{4}$$

Le filtre a bien joué son rôle et a permis de diminuer d'un facteur 10 le poids des fluctuations sinusoïdales par rapport à la composante continue

$$\psi_2 = -\arctan(x_1) = 84,3^\circ$$

Exercice 4 : Etude d'un filtre d'ordre 1

1. Filtre : RSF avec $e(t) = E_m \cos(\omega t)$



$$\text{LDM : } \underline{u_e} = \underline{u_c} + \underline{u_s} \quad (1)$$

$$\text{Loi sur C : } \underline{i} = C \frac{d\underline{u_c}}{dt} \Rightarrow \underline{i} = jC\omega \underline{u_c} \Rightarrow \underline{u_c} = \frac{\underline{i}}{jC\omega} \quad (2)$$

$$\text{Loi sur R (loi d'Ohm) : } \underline{u_s} = R\underline{i} \Rightarrow \underline{i} = \frac{\underline{u_s}}{R} \quad (3)$$

$$(2) \text{ et } (3) \Rightarrow \underline{u_c} = \frac{\underline{u_s}}{jRC\omega} = \frac{\underline{u_s}}{jx}$$

$$(1) \Rightarrow \underline{u_e} = \frac{\underline{u_s}}{jx} + \underline{u_s} = \left(1 + \frac{1}{jx}\right) \underline{u_s}$$

$$\Rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{jx}} = \frac{1}{1 - \frac{j}{x}}$$

$$2. \quad G = |\underline{H}| = \left| \frac{1}{1 - \frac{j}{x}} \right| = \frac{|1|}{\left| 1 - \frac{j}{x} \right|} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = G_{\max} = 1$$

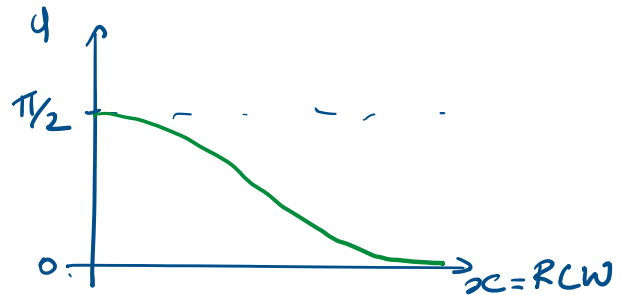
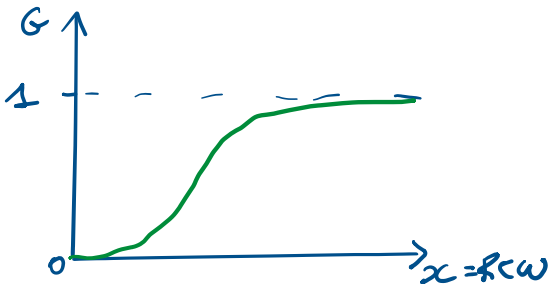
Filtre passe-haut

$$\varphi(x) = \arg(\underline{H}) = \arg\left(\frac{1}{1 - \frac{j}{x}}\right) = \arg(1) - \arg\left(1 - \frac{j}{x}\right) = \arctan\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x) = +\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$$

3. Allure des courbes de réponse en gain et en phase :



4. Détermination de la pulsation de coupure :

$$G(x_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x_c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow 1 + \frac{1}{x_c^2} = 2 \Rightarrow \frac{1}{x_c^2} = 1 \Rightarrow x_c^2 = 1 \Rightarrow x_c = 1 \Rightarrow \omega_c = \frac{1}{RC}$$

Bande-passante du filtre passe-haut en pulsation : $\left[\frac{1}{RC}; +\infty\right[$

Exercice 5 : Etude d'un filtre d'ordre 1 – application à la transmission d'un signal**1. a. RSF $\rightarrow$ complexes**

$$\text{LDM : } \underline{e} = R\underline{i} + \underline{s}$$

$$\text{LDN : } \underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2 \Rightarrow \underline{e} = R\underline{i}_1 + R\underline{i}_2 + \underline{s}$$

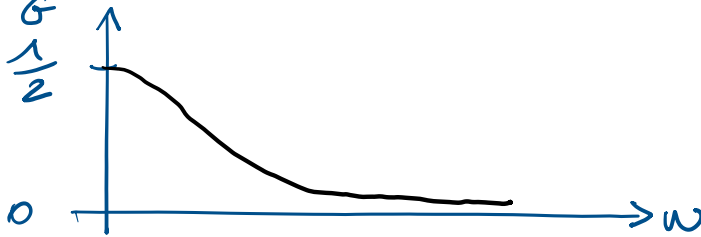
$$\text{Loi sur R : } \underline{s} = R\underline{i}_1$$

$$\text{Loi sur C : } \underline{i}_2 = jC\omega\underline{s} \Rightarrow \underline{e} = \underline{s} + jRC\omega\underline{s} + \underline{s}$$

$$\Rightarrow \underline{e} = (2 + jRC\omega)\underline{s} \Rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{2 + jRC\omega}$$

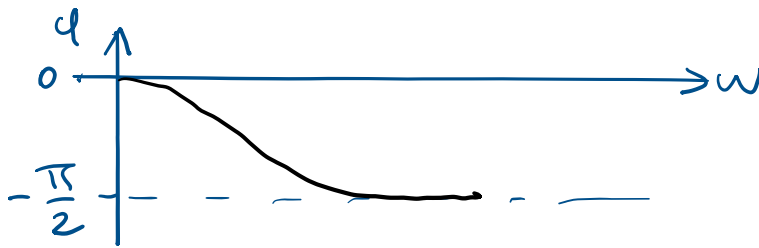
$$\text{b. } G = |\underline{H}| = \left| \frac{1}{2 + jRC\omega} \right| = \frac{[1]}{[2 + jRC\omega]} = \frac{1}{\sqrt{4 + (RC\omega)^2}}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} G(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega) = \frac{1}{2} : \text{filtre passe-bas avec } G_{\max} = \frac{1}{2}$$



$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arg\left(\frac{1}{2 + jRC\omega}\right) = \arg(1) - \arg(2 + jRC\omega) = 0 - \arctan\left(\frac{RC\omega}{2}\right) = -\arctan\left(\frac{RC\omega}{2}\right)$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} \varphi(\omega) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} \varphi(\omega) = 0$$



$$\text{c. } G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4 + (RC\omega_c)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \Rightarrow 4 + (RC\omega_c)^2 = 8 \Rightarrow (RC\omega_c)^2 = 4 \Rightarrow RC\omega_c = 2 \Rightarrow \omega_c = \frac{2}{RC}$$

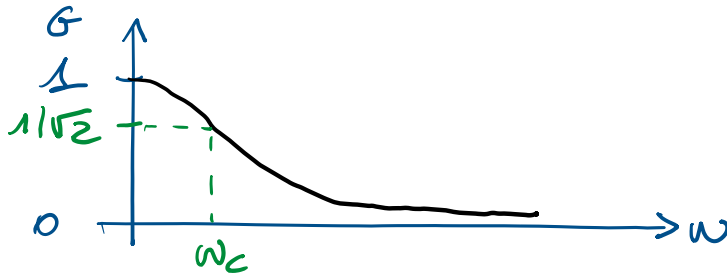
Filtre passe-bas $\Rightarrow$ bande-passante en pulsation : $\left[0; \frac{2}{RC}\right]$

2. Si le filtre est idéal, les composantes d'entrée $\frac{E_m}{3^2} \cos(3\omega_0 t)$ et $\frac{E_m}{5^2} \cos(5\omega_0 t)$ sont coupées par le filtre. En sortie du filtre, seule la composante $E_m \cos(\omega_0 t)$ est donc conservée. Si on considère que les amplitudes ne sont pas modifiées (filtre idéal), le signal en sortie attendu est donc : $E_m \cos(\omega_0 t)$.

Exercice 6 : Filtre RC en cascade

$$1. \quad G = |H| = \left| \frac{1}{1 - R^2 C^2 \omega^2 + j3RC\omega} \right| = \frac{|1|}{|1 - R^2 C^2 \omega^2 + j3RC\omega|} = \frac{1}{\sqrt{(1 - R^2 C^2 \omega^2)^2 + (3RC\omega)^2}}$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} G(\omega) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega) = 1 : \text{filtre passe-bas avec } G_{\max} = 1$$



2. On reconnaît l'allure de la réponse en gain pour un filtre passe-bas.

$$G(f_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7 \Rightarrow \text{par lecture graphique : } f_c \approx 0,6 \text{ Hz}$$

Filtre passe-bas $\Rightarrow$ bande-passante en fréquence (Hz) : $[0; 0,6]$

Exercice 7 : Filtre réjecteur de fréquence (ou coupe-bande)

$$1. \quad G = |H| = \left| \frac{1 - x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \right| = \frac{|1 - x^2|}{|1 - x^2 + j\frac{x}{Q}|} = \frac{|1 - x^2|}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

$$2. \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 1 ; \lim_{x \rightarrow 0} G(x) = 1 \quad \text{et par ailleurs, on remarque que } G(x = 1) = 0$$

Ce filtre laisse donc passer les basses et les hautes fréquences tout en rejetant la fréquence $f = f_0$, d'où le nom donné au filtre

$$3. \quad G(x_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Par lecture graphique : $x_{c1} = 0,80$ et $x_{c2} = 1,25$

En fréquence : $f_{c1} = x_{c1} \times f_0 = 570 \text{ Hz}$ et $f_{c2} = x_{c2} \times f_0 = 890 \text{ Hz}$

4. Le signal périodique d'entrée peut se décomposer sous la forme (décomposition de Fourier) :

$$e(t) = e_1(t) + e_2(t) + e_3(t) \text{ avec}$$

$$e_1(t) = E_{m1} \cos(2\pi f_1 t + \varphi_{e1}) \text{ où } f_1 = 350 \text{ Hz et } E_{m1} = 1,0 \text{ V (fondamental = harmonique de rang 1)}$$

$$e_2(t) = E_{m2} \cos(2\pi f_2 t + \varphi_{e2}) \text{ où } f_2 = 2f_1 = 700 \text{ Hz et } E_{m2} = 0,1 \text{ V (harmonique de rang 2)}$$

$$e_3(t) = E_{m3} \cos(2\pi f_3 t + \varphi_{e3}) \text{ où } f_3 = 3f_1 = 1050 \text{ Hz et } E_{m3} = 0,8 \text{ V (harmonique de rang 3)}$$

Le signal de sortie sera sous la forme : $s(t) = s_1(t) + s_2(t) + s_3(t)$

$$s(t) = S_{m1} \cos(2\pi f_1 t + \varphi_{s1}) \text{ où } f_1 = 350 \text{ Hz}$$

$$s_2(t) = S_{m2} \cos(2\pi f_2 t + \varphi_{s2}) \text{ où } f_2 = 2f_1 = 700 \text{ Hz}$$

$$s_3(t) = S_{m3} \cos(2\pi f_3 t + \varphi_{s3}) \text{ où } f_3 = 3f_1 = 1050 \text{ Hz}$$

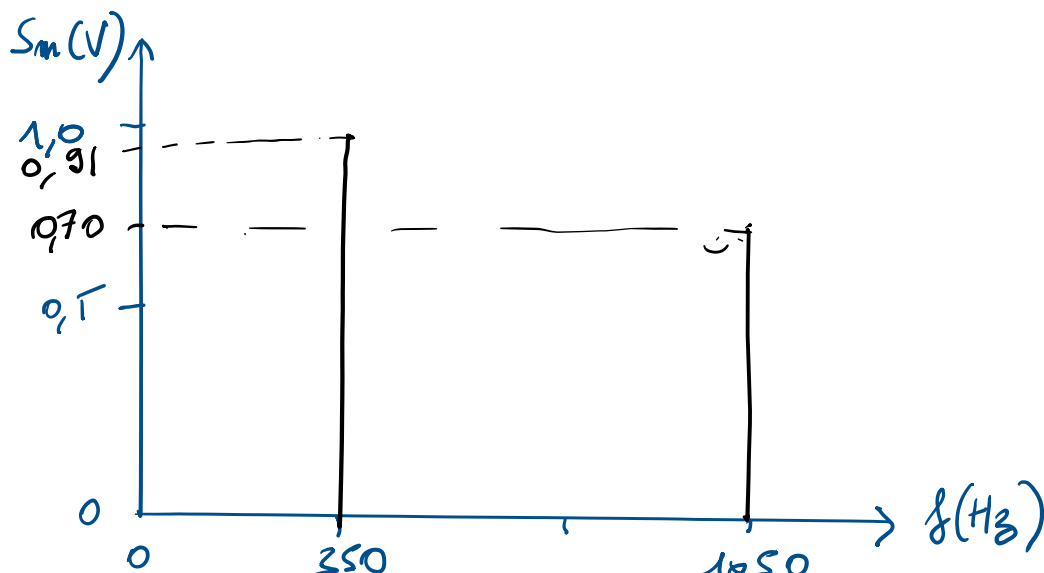
Pour déterminer le spectre en fréquence du signal en sortie, on va calculer les amplitudes de sortie, S_{m1} , S_{m2} et S_{m3} , en appliquant la formules du gain aux fréquences correspondantes :

$$S_{m1} = E_{m1} \times G(x_1) \quad \text{avec } x_1 = \frac{f_1}{f_0} = 0,49 \quad \text{Par lecture graphique : } G(x_1) = 0,91 \quad \Rightarrow S_{m1} = 0,91 \text{ V}$$

$$S_{m2} = E_{m2} \times G(x_2) \quad \text{avec } x_2 = \frac{f_2}{f_0} = 0,98 \quad \text{Par lecture graphique : } G(x_2) = 0 \quad \Rightarrow S_{m2} = 0,0 \text{ V}$$

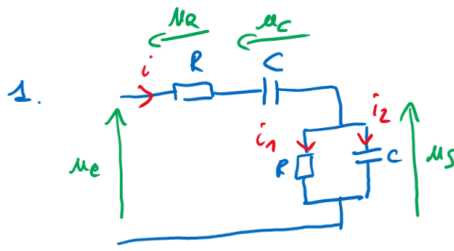
$$S_{m3} = E_{m3} \times G(x_3) \quad \text{avec } x_3 = \frac{f_3}{f_0} = 1,47 \quad \text{Par lecture graphique : } G(x_3) = 0,87 \quad \Rightarrow S_{m3} = 0,70 \text{ V}$$

Spectre du signal de sortie :





1.



LDM: $u_e = u_R + u_C + u_s$

Li sur R: $u_e = R i + u_C + u_s$

Li sur C: $u_e = R C \frac{du_C}{dt} + u_C + u_s$

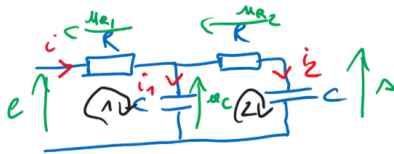
$\Rightarrow$ $\underline{u_e} = jRC\omega \underline{u_C} + \underline{u_C} + \underline{u_s}$
RSF $\underline{u_e} = (1 + jRC\omega) \underline{u_C} + \underline{u_s}$ ①

Li des maillons: $i = i_1 + i_2$

Li sur R et C: $C \frac{du_C}{dt} = \frac{u_s}{R} + C \frac{du_s}{dt}$ $\Rightarrow$ RSF $jC\omega \underline{u_C} = \frac{\underline{u_s}}{R} + jC\omega \underline{u_s}$
 $\Rightarrow \underline{u_C} = \underline{u_s} \times \left[\frac{1}{jRC\omega} + 1 \right]$ ②

①, ② $\underline{u_e} = (1 + jRC\omega) \times \left(1 + \frac{1}{jRC\omega} \right) \underline{u_s} + \underline{u_s}$
 $\Rightarrow \underline{u_e} = \left(1 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega} + 1 \right) \underline{u_s} + \underline{u_s} = \left(2 + j \left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega} \right) \right) \underline{u_s} + \underline{u_s}$
 $\Rightarrow \underline{u_e} = \left(3 + j \left(x - \frac{1}{x} \right) \right) \underline{u_s}$ ($x = RC\omega$)
 $\Rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{1}{3 + j \left(x - \frac{1}{x} \right)}$

2.



LDM: $e = u_{R1} + u_C$

LDM: $u_C = u_{R2} + \Delta$ ①

$\Rightarrow e = u_{R1} + u_{R2} + \Delta$

Li sur R: $e = R i + R i_2 + \Delta$

Li sur C: $e = R i + R C \frac{d\Delta}{dt} + \Delta$ $\Rightarrow$ RSF $\underline{e} = R i + jRC\omega \underline{\Delta} + \underline{\Delta}$ ②

Li des maillons: $i = i_1 + i_2$

Li sur R et C: $i = C \frac{du_C}{dt} + C \frac{d\Delta}{dt}$ RSF $\underline{i} = jC\omega \underline{u_C} + jC\omega \underline{\Delta}$ ③

②, ③: $\underline{e} = R [jC\omega \underline{u_C} + jC\omega \underline{\Delta}] + jRC\omega \underline{\Delta} + \underline{\Delta}$ ④

① $\Rightarrow u_C = u_{R2} + \Delta = R i_2 + \Delta = R C \frac{d\Delta}{dt} + \Delta$ RSF $\underline{u_C} = jRC\omega \underline{\Delta} + \underline{\Delta}$ ⑤

④, ⑤ $\Rightarrow \underline{e} = R [jC\omega \times (jRC\omega \underline{\Delta} + \underline{\Delta}) + jC\omega \underline{\Delta}] + jRC\omega \underline{\Delta} + \underline{\Delta}$
 $\underline{e} = \underline{\Delta} [1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2]$

$\Rightarrow \underline{H} = \frac{\underline{\Delta}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 - (RC\omega)^2 + 3jRC\omega}$