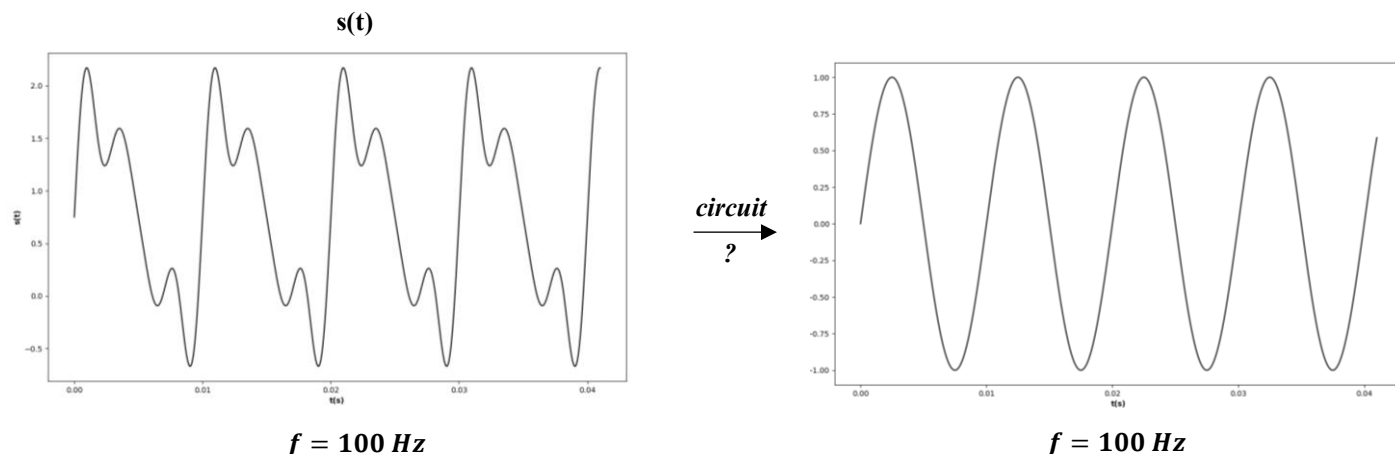


Chapitre 1 : Filtrage linéaire d'un signal

Introduction

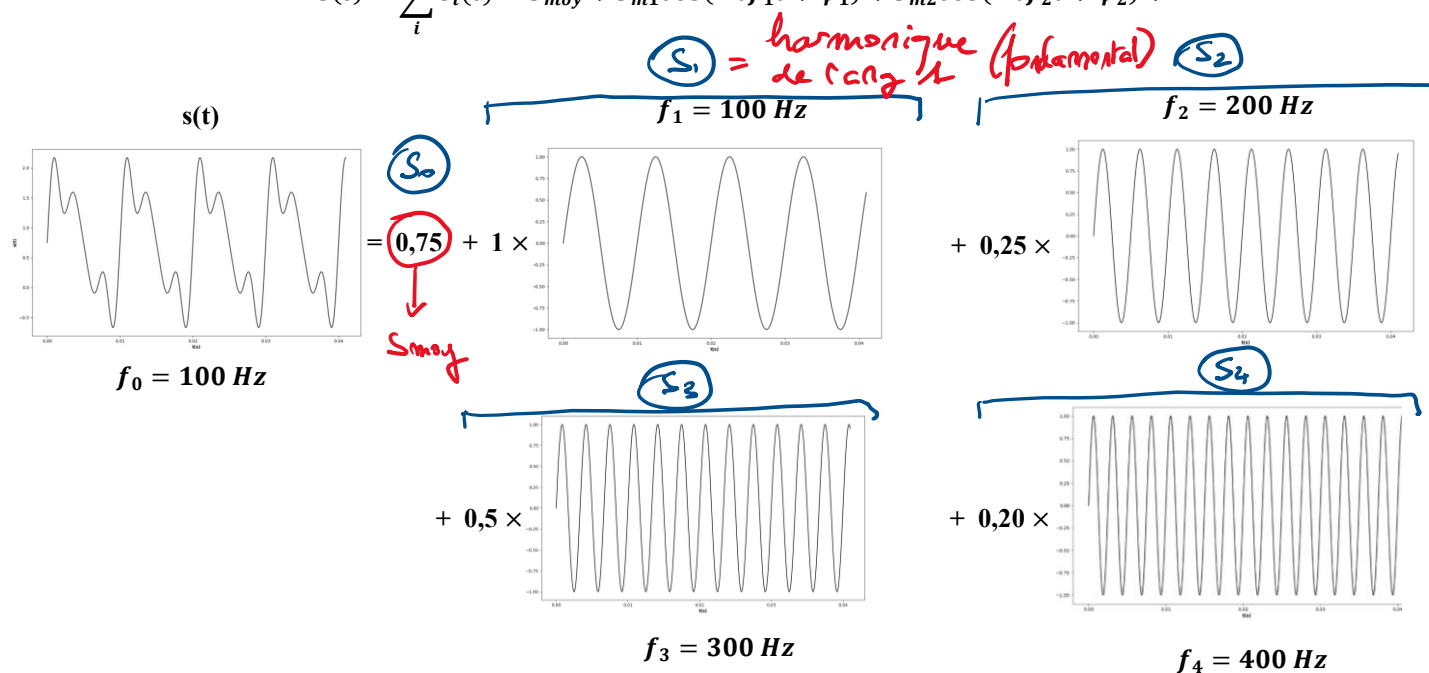


I. Spectre d'un signal périodique

1. Décomposition d'un signal périodique

- Tout signal périodique de fréquence f_1 peut se décomposer comme une somme de fonctions sinusoïdales et éventuellement d'un terme constant :

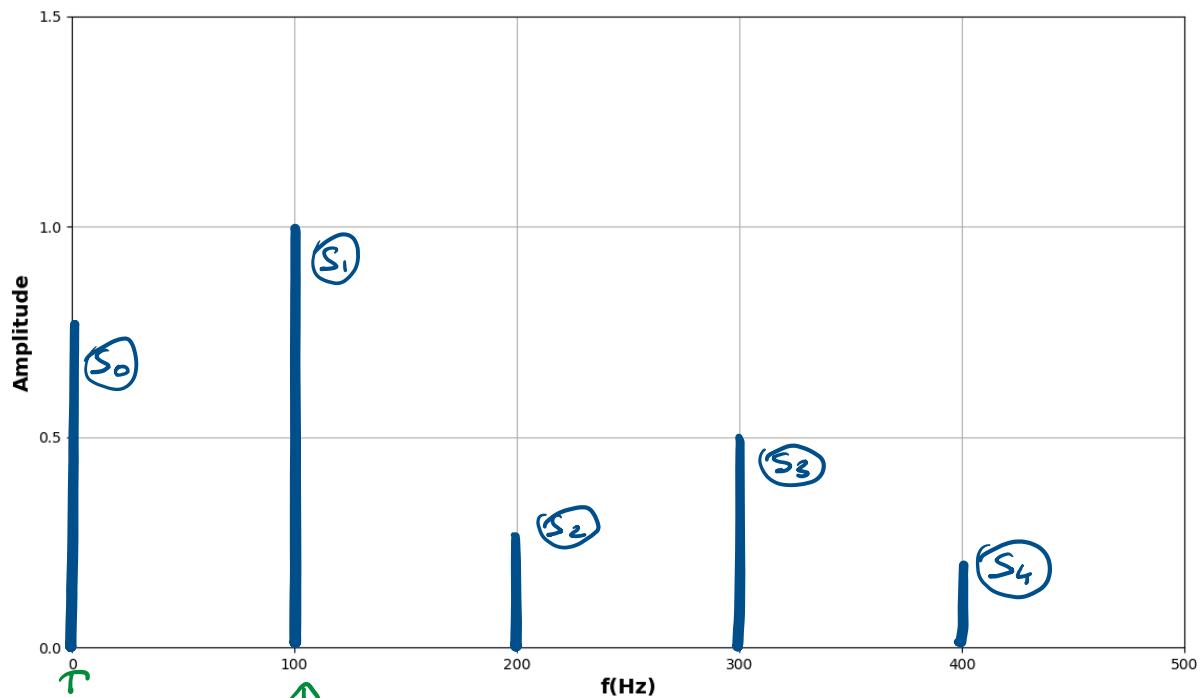
$$s(t) = \sum_i s_i(t) = S_{\text{moy}} + S_{m1} \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + S_{m2} \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2) + \dots$$



- La décomposition peut faire apparaître un **terme constant** qui correspond à la **valeur moyenne** du signal
- La décomposition fait apparaître un signal appelé **fondamental** ou **harmonique de rang 1**. C'est un signal sinusoïdal de même fréquence $f_1 = f_0$ que le signal périodique
- Les sinusoïdes de fréquence plus élevée $f_n = n \times f_0$, sont appelées les **harmoniques de rang n**.

2. Spectre d'un signal périodique

➔ Tracer le spectre, représentant les amplitudes de chaque composante en fonction de leur fréquence, du signal $s(t)$ précédant



↑
valeur moyenne

II. Notion de filtrage

↑
harmonique de rang 1 = fondamental

1. Définition

Définitions :

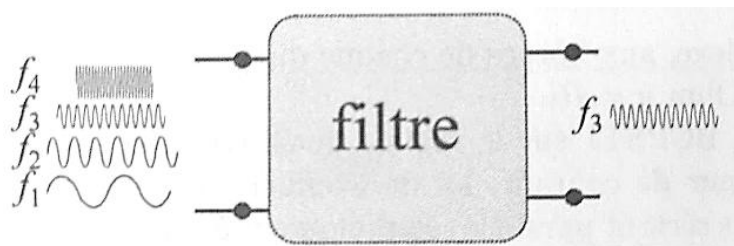
Un **filtre linéaire** est un circuit électronique constitué de **dipôles linéaires** (**passifs** : résistance, condensateur ; **actif** : source de tension idéale ou réelle) conçu pour transmettre des signaux possédant certaines fréquences et pour atténuer des signaux de fréquences non désirées.

Un **filtre linéaire** est dit **passif** s'il est constitué uniquement de **dipôles linéaires passifs**

Exemple :

Signal d'entrée

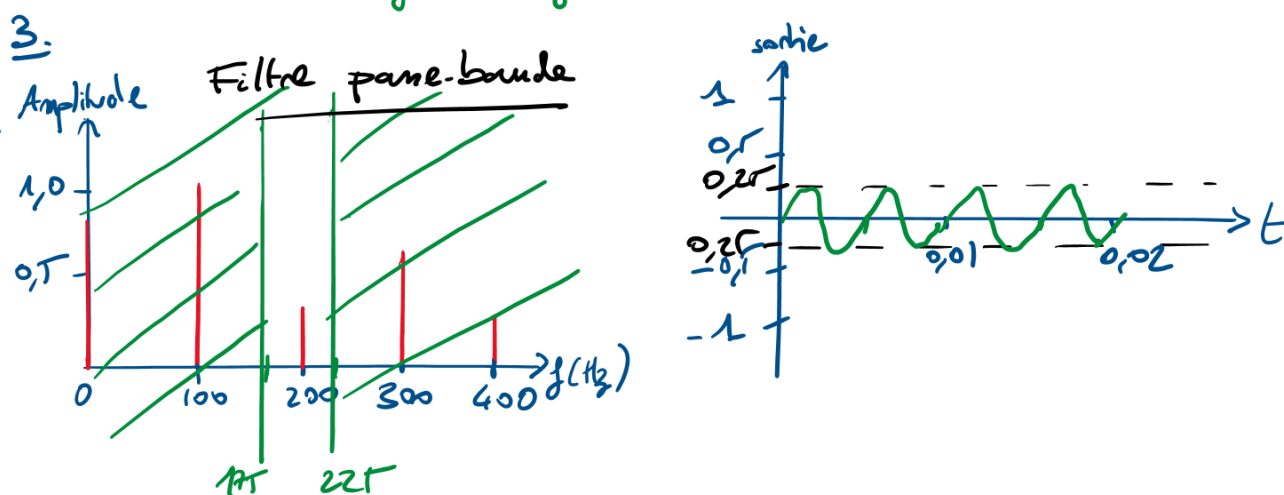
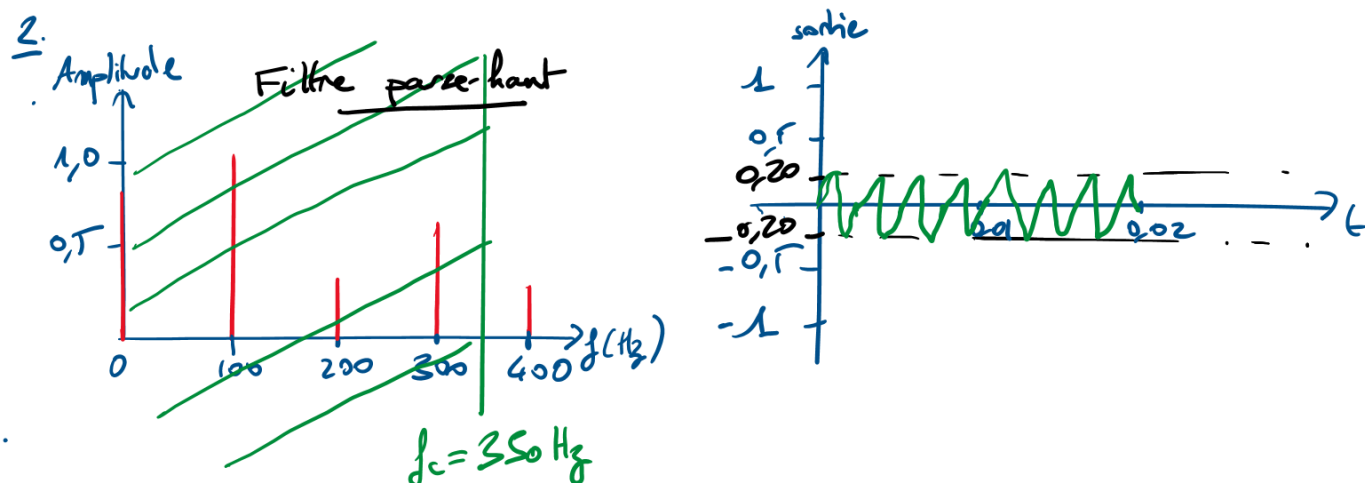
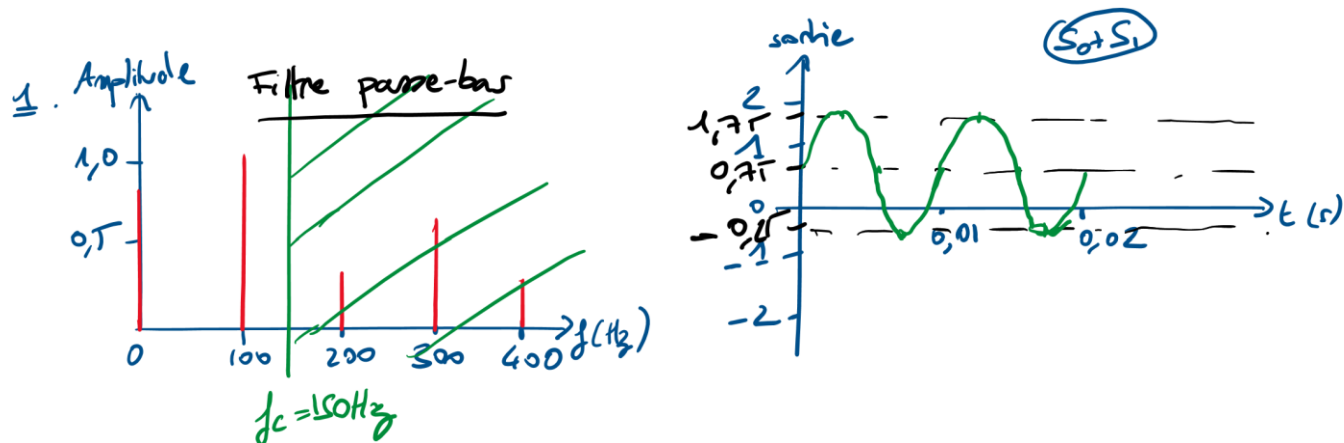
Signal de sortie



2. Les différents types de filtre

Donnez les spectres et signaux attendus si le signal $s(t)$ est soumis à un :

1. Filtre **passé-bas** idéal de fréquence de coupure $f_c = 150 \text{ Hz}$
2. Filtre **passé-haut** idéal de fréquence de coupure $f_c = 350 \text{ Hz}$
3. Filtre **passé-bande** idéal de fréquence centrale $f_0 = 200 \text{ Hz}$ et de bande-passante $\Delta f = 50 \text{ Hz}$

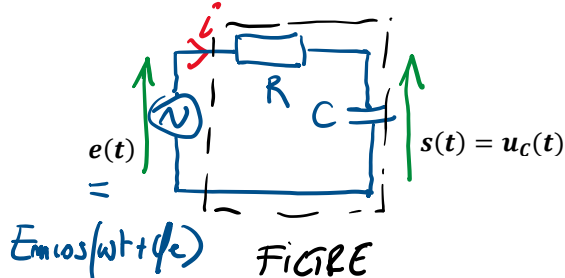


III. Filtre passif d'ordre 1 : application à la réponse du circuit RC à une excitation sinusoïdale

1. Circuit RC – équation différentielle du circuit

Le circuit RC est soumis à l'action d'une source de tension $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$ (ou de courant), φ_e , la **phase à l'origine** étant généralement pris égal à 0, et $\omega = 2\pi f$, la **pulsation** du signal de fréquence f .

→ Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension de sortie du filtre $s(t)$:



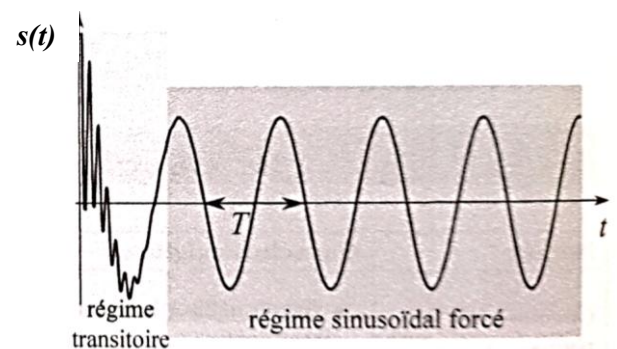
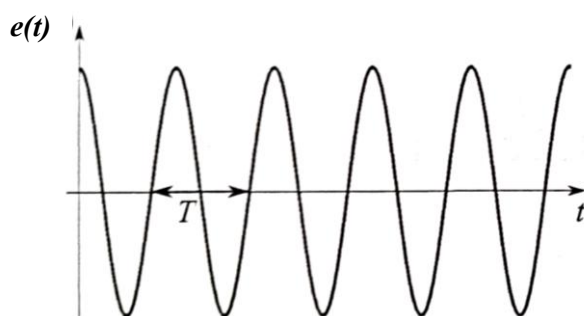
LDF: $e = u_R + \Delta$
Loi sur R (loi d'Ohm): $e = Ri + \Delta$
Loi sur C: $e = RC \frac{d\Delta}{dt} + \Delta$
 $\Rightarrow \frac{d\Delta}{dt} + \frac{\Delta}{RC} = \frac{e(t)}{RC}$

$\tau = RC \Rightarrow \frac{d\Delta(t)}{dt} + \frac{\Delta(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{\tau}$ pb $\neq \omega t$

2. Notion de régime sinusoïdal forcé (RSF)

- Il apparaît dans le circuit un court régime transitoire qui disparaît très vite.
- Après ce régime transitoire, le signal de sortie $s(t)$ du circuit ainsi que toutes les intensités et tensions du circuit vont évoluer selon une allure sinusoïdale de même fréquence f , et de même pulsation $\omega = 2\pi f$, que la source de tension. Par contre l'amplitude et la phase à l'origine du signal ont été modifiées par le filtre.

c'est le REGIME SINUSOÏDAL FORCÉ (RSF).



Le signal de sortie du filtre s'écrit alors sous la forme : $s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$

- S_m est l'amplitude du signal
 - φ_s la phase à l'origine du signal (et généralement aussi le déphasage entre le signal et la source de tension si $\varphi_e = 0$)
- ↑
↑
inconnues à chercher

- Remarque :** l'amplitude du signal sinusoïdal (lue sur un oscillogramme) est liée à sa valeur efficace (mesurée avec un multimètre) par la relation : $S_{eff} = \frac{S_m}{\sqrt{2}}$

3. Utilisation de la notation complexe

- Grandeur REELLE $\Rightarrow$ Grandeur COMPLEXE :

$$s(t) = S_m \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow \underline{s} = S_m e^{j(\omega t + \varphi)} = \underline{S_m} e^{j\omega t} \quad \text{où} \quad \underline{S_m} = S_m e^{j\varphi} \text{ correspond à l'amplitude complexe.}$$

Remarque :

$$e(t) = E_m \cos(\omega t)$$

$$\underline{e} =$$

$$\underline{E_m} =$$

- Grandeur COMPLEXE $\Rightarrow$ Grandeur REELLE :

$$S_m = |\underline{s}| = |\underline{S_m}| \quad \varphi = \arg(\underline{S_m})$$

- Déphasage d'un signal $s_1(t)$ par rapport à un signal $s_2(t)$:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \arg\left(\frac{\underline{s_1}}{\underline{s_2}}\right) = \arg\left(\frac{\underline{S_{m1}}}{\underline{S_{m2}}}\right) = \arg(\underline{s_1}) - \arg(\underline{s_2}) = \arg(\underline{S_{m1}}) - \arg(\underline{S_{m2}})$$

- Les lois sur les dipôles R et C ainsi que les lois de Kirchhoff (loi des mailles / loi des nœuds) restent valables avec les grandeurs complexes

- Intérêt :

→ Etablir les expressions de $\frac{ds}{dt}$ et $\frac{d^2s}{dt^2}$ en fonction de $\underline{s}$

$$\underline{s} = S_m e^{j(\omega t + \varphi)}$$

$$\frac{d\underline{s}}{dt} = j\omega \underbrace{S_m e^{j(\omega t + \varphi)}}_{\underline{s}} = j\omega \underline{s}$$

$$\frac{d^2\underline{s}}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\underline{s}}{dt}\right) = \frac{d(j\omega \underline{s})}{dt} = j\omega \frac{d\underline{s}}{dt} = j\omega \times j\omega \underline{s} = \underbrace{j^2}_{=-1} \omega^2 \underline{s} = -\omega^2 \underline{s}$$

Bilan :

$$\begin{aligned} \frac{d\underline{s}}{dt} &= j\omega \underline{s} \\ \frac{d^2\underline{s}}{dt^2} &= -\omega^2 \underline{s} \end{aligned}$$

4. Circuit RC – résolution de l'équation différentielle du circuit en utilisant les notations complexes

→ Etablir l'expression de $\underline{s}$ en fonction de $\underline{e}$, R , C et ω ($j^2 = -1$) pour le circuit RC

$$\begin{aligned}\frac{ds}{dt} + \frac{s}{\tau} &= \frac{e}{\tau} \xrightarrow{\text{RSF}} \frac{d\underline{s}}{dt} + \frac{\underline{s}}{\tau} = \frac{\underline{e}}{\tau} \\ \Rightarrow j\omega \underline{s} + \frac{\underline{s}}{\tau} &= \frac{\underline{e}}{\tau} \\ \Rightarrow \left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right) \underline{s} &= \frac{\underline{e}}{\tau} \\ \Rightarrow \underline{s} &= \frac{\underline{e}}{1 + jRC\omega}\end{aligned}$$

5. Fonction de transfert $\underline{H}$

Définition : La fonction de transfert $\underline{H}$ du filtre correspond au rapport : $\underline{H} = \frac{u_s}{u_e}$

→ Etablir l'expression de $\underline{H}$ en fonction de R , C et ω ($j^2 = -1$) pour le circuit RC

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

6. Gain $G = |\underline{H}|$

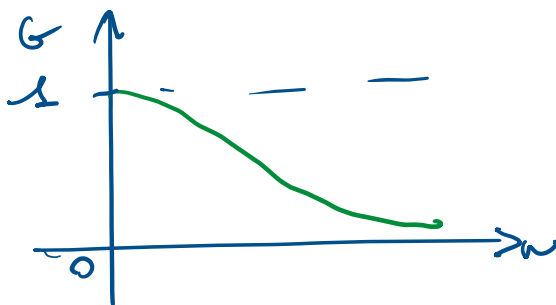
Définition : Le module de la fonction de transfert, noté G , est appelé **gain du filtre** :

$$G = |\underline{H}| = \left| \frac{u_s}{u_e} \right| = \frac{U_{sm}}{U_{em}} = \frac{U_{s,eff}}{U_{e,eff}}$$

La courbe représentant le gain G en fonction de la pulsation ω ou de la fréquence f correspond à la **courbe de réponse en gain**

→ Etablir l'expression de G en fonction de R , C et ω pour le circuit RC

$$G = |\underline{H}| = \left| \frac{1}{1 + jRC\omega} \right| = \frac{|1|}{|1 + jRC\omega|} = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}$$



$$\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega) &= 1 \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} G(\omega) &= 0\end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned}\lim_{\omega \rightarrow 0} G(\omega) &= 1 \\ \lim_{\omega \rightarrow +\infty} G(\omega) &= 0\end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{filtre} \\ \text{passe-bas} \end{array}$$

et $G_{\max} = 1.0$

7. Déphasage $\varphi = \arg(H)$

Définition : Le déphasage entre les signaux d'entrée et de sortie, noté φ , correspond à l'argument de la fonction de transfert :

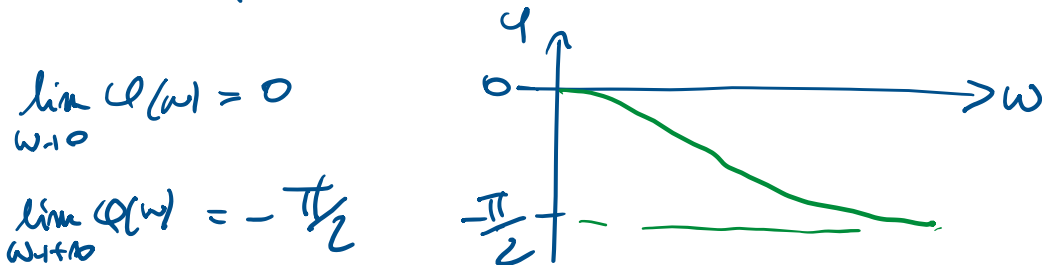
$$\varphi = \varphi_s - \varphi_e = \arg(H)$$

La courbe représentant le déphasage φ en fonction de la pulsation ω ou de la fréquence f correspond à la **courbe de réponse en phase**

→ Etablir l'expression de φ en fonction de R , C et ω pour le circuit RC

$$\varphi = \arg(H) = \arg\left(\frac{1}{1 + jRC\omega}\right) = \arg(1) - \arg(1 + jRC\omega)$$

$$\Rightarrow \underline{\varphi = -\arctan(RC\omega)}$$



8. Fréquence (ou pulsation) de coupure f_c (ou ω_c)

Définition : la fréquence de coupure f_c d'un filtre est définie par : $G(f_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$

$\omega_c = 2\pi f_c$ correspond à la **pulsation de coupure** ; on a aussi $G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$

→ Etablir l'expression de ω_c en fonction de R et C pour le circuit RC

$$G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1 + (RC\omega_c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow 1 + (RC\omega_c)^2 = 2 \Rightarrow (RC\omega_c)^2 = 1 \Rightarrow RC\omega_c = 1$$

$$\Rightarrow \underline{\omega_c = \frac{1}{RC}}$$

9. Bande-passante Δf (ou $\Delta\omega$)

Définition : La bande-passante en fréquences (ou en pulsation) d'un filtre est l'intervalle de fréquences (ou de pulsations) satisfaisant à :

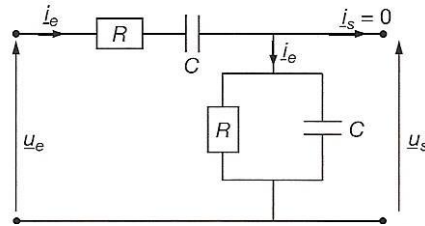
$$\frac{G_{max}}{\sqrt{2}} \leq G(f) \leq G_{max}$$

→ Donner la bande-passante pour le circuit RC

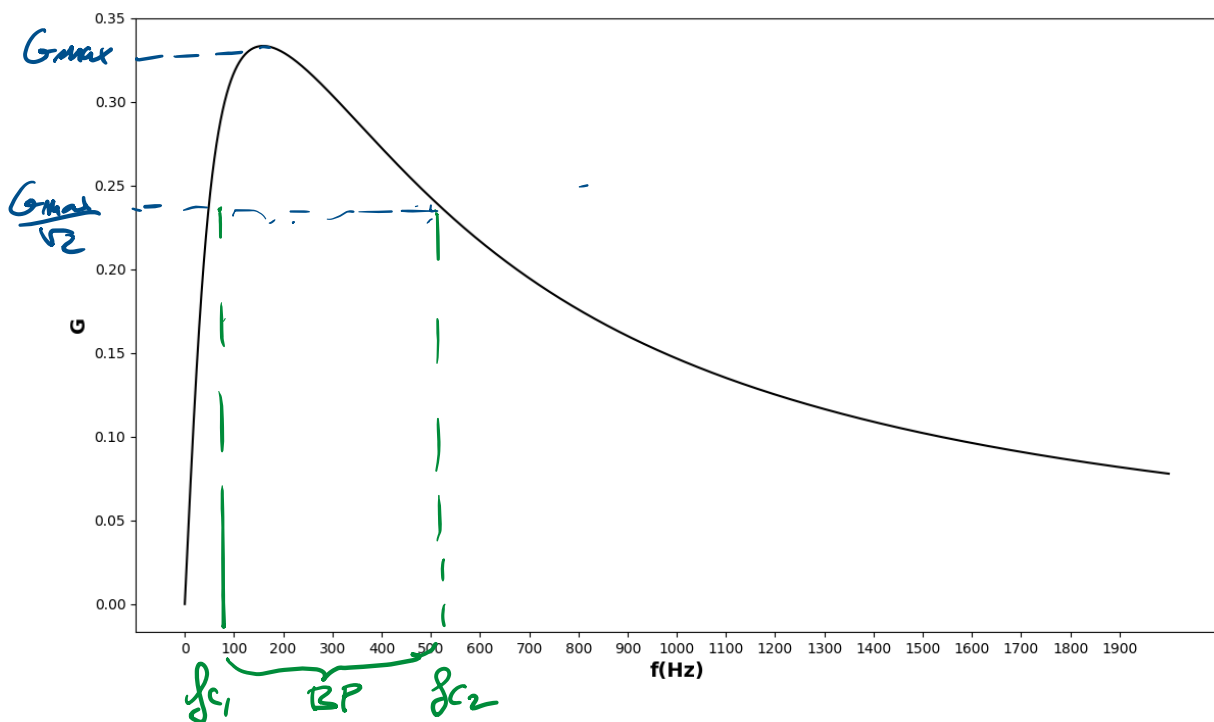
BP (en pulsation) : $\omega \in [0; \omega_c] = [0; \frac{1}{RC}] \Rightarrow \underline{\Delta\omega = \frac{1}{RC}}$

IV. Filtre passif d'ordre supérieur à 1

Soit le circuit ci-contre avec $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $C = 1,0 \text{ }\mu\text{F}$:



La courbe de réponse en gain est donnée ci-dessous.



→ Donner la nature du filtre

Filtre passe-bande

→ La fonction de transfert de ce filtre s'écrit : $\underline{H} = \frac{1}{3+j(x-\frac{1}{x})}$ avec $x = RC\omega$. Cette expression confirme-t-elle la nature du filtre ?

$$G = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{3^2 + (x - \frac{1}{x})^2}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} G(x) = 0$$

} Filtre passe-bande

→ Donner la bande-passante en exploitant le graphique

$$f(\text{Hz}) \in [50; 550] \Rightarrow \Delta f = 500 \text{ Hz.}$$

Les questions à se poser à l'issue de ce chapitre

Spectre d'un signal periodique

- Est-ce que je sais passer d'un spectre d'un signal périodique à son expression mathématique et inversement ?

Régime sinusoïdal forcé et notation complexe

- Est-ce que je sais à quoi correspond un régime sinusoïdal forcé ?
- Est-ce que je sais passer de l'expression mathématique d'un signal sinusoïdal à son expression sous forme complexe ?
- Est-ce que je sais exprimer la dérivée et la dérivée seconde d'un signal sous forme complexe ?

Filtre

- Est-ce que je connais la fonction d'un filtre ?
- Est-ce que je connais la nature de différents types de filtre ?
- Est-ce que je connais les outils (lois de Kirchhoff et lois sur les dipôles R et C) pour résoudre un circuit en notation complexe ?
- Est-ce que je sais à quoi correspond une fonction de transfert ?
- Est-ce que je sais passer à la réponse en gain et en phase à partir de la fonction de transfert ?
- Est-ce que je sais donner l'allure de la réponse en gain et en phase à partir de leur expression ?
- Est-ce que je connais la définition de la fréquence de coupure ? de la bande-passante d'un filtre ?