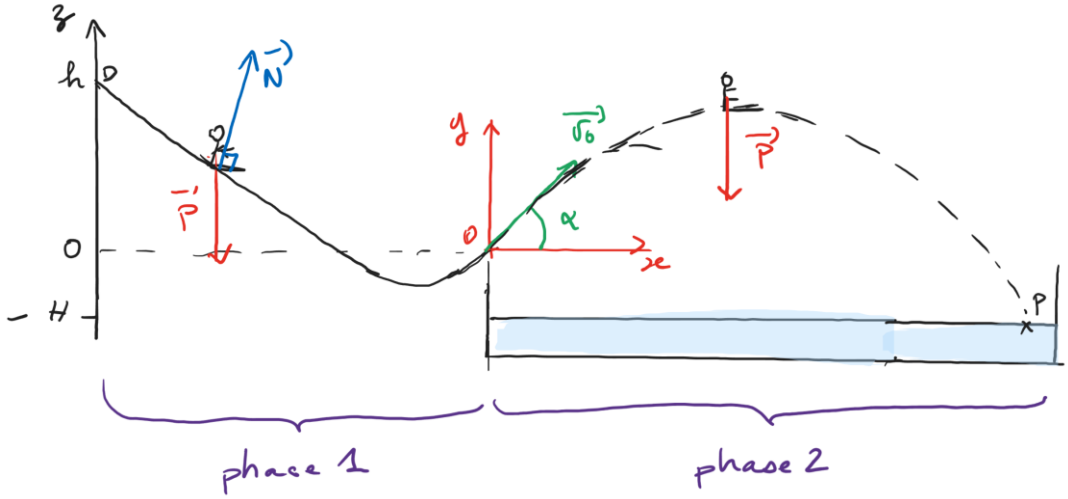
TD Physique n°5 : Approche énergétique du mouvement d'un point matériel - Correction

Exercice 1 *(BCPST1+2)* * : Etude du mouvement d'un enfant sur un toboggan



Référentiel : terrestre supposé galiléen

Système : enfant assimilé à un point matériel de masse m

Phase 1 : Glissement sur le toboggan : recherche de la vitesse v_0 de sortie du toboggan

Hypothèses : forces de frottement solide et fluide (avec l'air) négligées : obtiendra alors la vitesse maximale de sortie
Forces extérieures : $\vec{P}$, $\vec{N}$

TEM : $\boldsymbol{\Delta E_m = \sum_i W(\overrightarrow{F_{nci}})}$

$\vec{P}$ est conservative et $\vec{N}$ ne travaille pas, le système est donc conservatif : $\boldsymbol{\Delta E_m = 0}$

$\Longrightarrow E_m(z=0) = E_m(z=h) \Longrightarrow E_c(z=0) + E_{pp}(z=0) = E_c(z=h) + E_{pp}(z=h)$

En considérant que l'enfant s'élance sans vitesse initiale et en prenant un axe (Oz) verticale orienté vers le haut :
$\Longrightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}mv_0^2 + 0 \Longrightarrow \boldsymbol{v_0 = \sqrt{2gh}}$ AN : $\boldsymbol{v_0 = 10\ m \cdot s^{-1}}$

Phase 2 : Chute libre hors du toboggan : recherche de l'abscisse du point du chute

Hypothèses : forces de frottement fluide (avec l'air) négligées : obtiendra alors l'abscisse maximale du point de chute
Forces extérieures : $\vec{P}$

PFD : $\boldsymbol{m\vec{a} = \vec{P}}$

Repère (O,x,y) avec origine O en sortie de toboggan et axe (Oy) vertical ascendant. L'enfant sort du toboggan avec la vitesse v_0 et un angle α avec la verticale

La projection du PFD donne : sur l'axe (Oy): $m\ddot{y} = -mg \Longrightarrow \ddot{y} = -g$ sur l'axe (Ox) : $m\ddot{x} = 0$

ce qui donne par intégration : $\dot{y} = -gt + v_0 sin\alpha$ $\dot{x} = v_0 cos\alpha$

ce qui donne par nouvelle intégration : $y = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 sin\alpha t$ $x = v_0 cos\alpha t$

Au point P : $y_P = -H = -\frac{1}{2}gt_{sol}^2 + v_0 sin\alpha t_{sol} \Longrightarrow \frac{1}{2}gt_{sol}^2 - v_0 sin\alpha t_{sol} - H = 0$

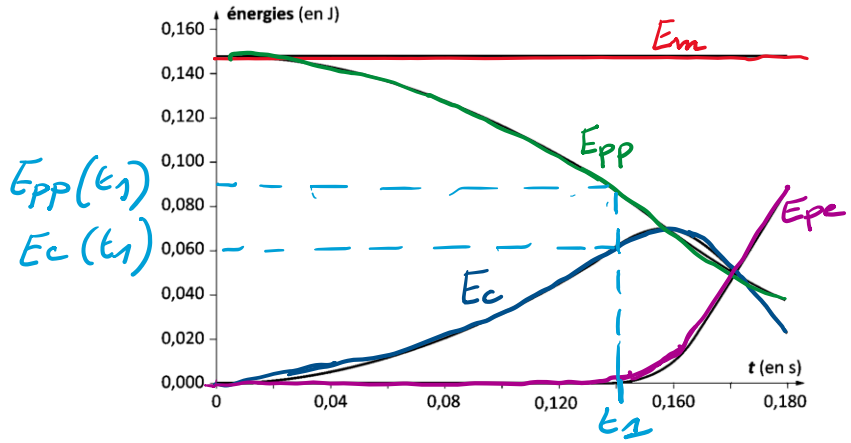
La résolution de l'équation du 2ne degré donne : $t_{sol} = \frac{v_0 sin\alpha + \sqrt{(v_0 sin\alpha)^2 + 2gH}}{g}$

L'abscisse vaut alors : $x_P = x(t = t_{sol}) = v_0 cos\alpha t_{sol} = v_0 cos\alpha \times \frac{v_0 sin\alpha + \sqrt{(v_0 sin\alpha)^2 + 2gH}}{g}$ avec $v_0 = \sqrt{2gh}$

$\boldsymbol{x_P = 9,5\ m}$ qui est une approximation, les frottements (solide et liquide) ayant été négligés

Exercice n°2 : Saut à l'élastique

1.



$E_c = \frac{1}{2}mv^2$: v ↗, donc E_c ↗, en début de mouvement puis v ↘, donc E_c ↘, à partir du rappel de l'élastique
$E_{pp} = mgz$ (axe (Oz) orienté vers le haut) : E_{pp} ↘ au cours du mouvement
$E_{pe} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$: existe à partir du moment où l'élastique devient tendu de longueur égal à ℓ_0, puis ↗
$E_m = E_c + E_{pp} + E_{pe} = cste$ en absence de frottements (mouvement conservatif : $\vec{P}$ et $\overrightarrow{F_R}$ sont deux forces conservatives)

2. La chute libre se termine lorsque l'énergie potentielle élastique devient non nulle, donc, par lecture graphique à : $t_1 = 0{,}140\ s$
Par correspondance graphique, on lit à cette date t_1 : $E_{pp}(t = t_1) = 0{,}090\ J$. Or $E_{pp} = mgz \Longrightarrow z_1 = \frac{E_{pp}(t=t_1)}{mg} = 0{,}141\ m$
Initialement : $E_m = E_m(t = 0) = E_{pp}(t = 0) = mgz_0 \Longrightarrow z_0 = \frac{E_m}{mg} = 0{,}235\ m$
La hauteur de chute vaut donc : $\boldsymbol{h_0 = z_0 - z_1 = 0{,}094\ m = 9{,}4\ cm}$

3. Par correspondance graphique, on lit à la date t_1 : $E_c(t = t_1) = 0{,}060\ J$. Or $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \Longrightarrow \boldsymbol{v_1 = \sqrt{\frac{2E_c(t=t_1)}{m}} = 1{,}26\ m \cdot s^{-1}}$

4. $W(\overrightarrow{F_R}) = -\Delta E_{pe} = -\frac{1}{2}k(\ell_{max} - \ell_0)^2 = -\frac{1}{2}k(z_{max} - z_1)^2$

Référentiel : terrestre supposé galiléen
Système : solide de masse m assimilé à un point matériel
Forces extérieures : $\vec{P}$, $\overrightarrow{F_R}$

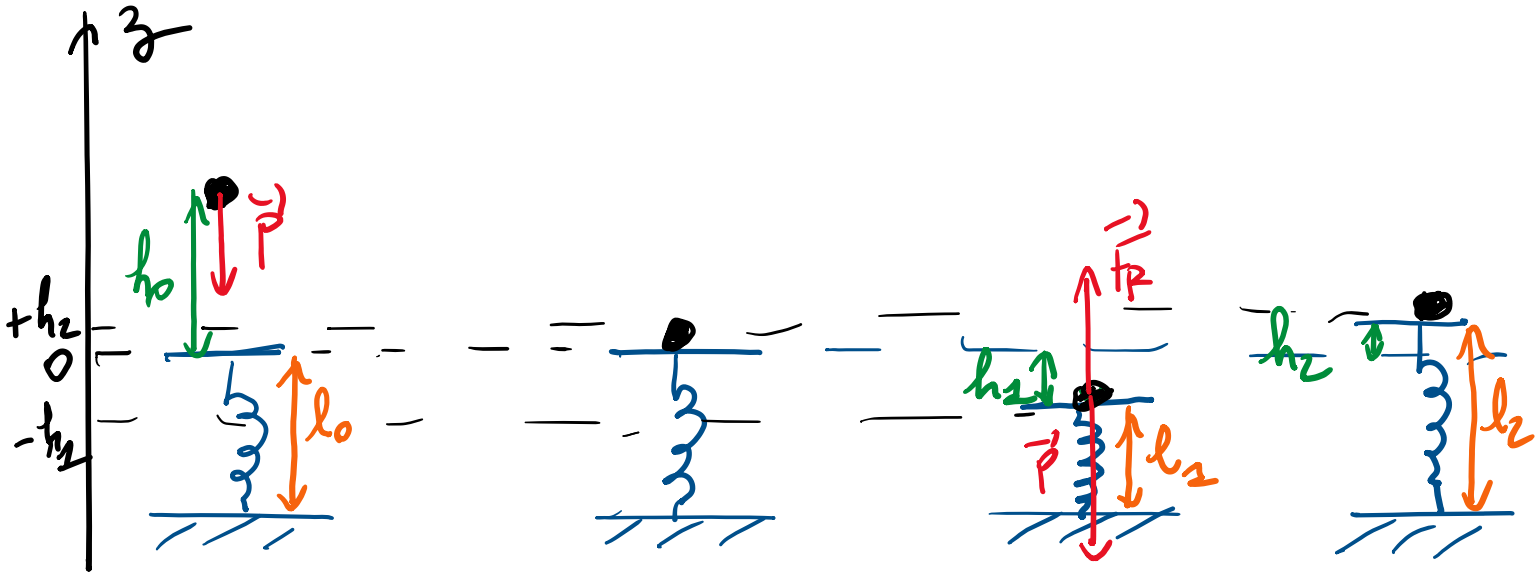
TEC : $\Delta E_c = \sum_i W(\overrightarrow{F_i}) = W(\overrightarrow{F_R}) + W(\vec{P})$
$\Longrightarrow \frac{1}{2}mv_{max}^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{1}{2}k(z_{max} - z_1)^2 - mg \times (z_1 - z_{max}) = -\frac{1}{2}kh_1^2 + mgh_1$ avec $h_1 = z_{max} - z_1$

Or $v_{max} = 0 \Longrightarrow -\frac{1}{2}mv_1^2 = -\frac{1}{2}kh_1^2 + mgh_1 \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{1}{2}kh_1^2 - mgh_1 - \frac{1}{2}mv_1^2 = 0}$

$$h_1 = \frac{mg + \sqrt{(mg)^2 + 4 \times \frac{1}{2}k \times \frac{1}{2}m}}{k}$$

5. $H = z_1 + h_1$. AN : $\boldsymbol{H = 0{,}182\ m}$

Exercice 3 : Théorème de l'énergie mécanique et ressort



1. **Référentiel :** terrestre supposé galiléen
   Système : boule de pa^te assimilé à un point matériel M de masse m
   Hypothèses : forces de frottement solide et fluide (avec l'air) négligées

   Phase de chute libre : A = point initial B = point où la boule entre en contact avec le plateau

   Forces extérieures : $\vec{P}$: force conservative

   TEM : $\boldsymbol{\Delta E_m = \sum_i W(\overrightarrow{F_{nci}}) = 0 \Longrightarrow E_m(B) = E_m(A)}$

   Phase où le plateau s'affaisse : B = point initial C = point où le plateau s'est affaissé de la hauteur h_1

   Forces extérieures : $\vec{P}$: force conservative $\overrightarrow{F_R}$: force de rappel du ressort = force conservative

   TEM : $\boldsymbol{\Delta E_m = \sum_i W(\overrightarrow{F_{nci}}) = 0 \Longrightarrow E_m(B) = E_m(C)}$

   Conclusion : $\boldsymbol{E_m(A) = E_m(C)}$

   $\Longrightarrow E_c(A) + E_{pp}(A) = E_c(C) + E_{pp}(C) + E_{pe}(C)$

   $\Longrightarrow \frac{1}{2}mv_A^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}mv_C^2 + mg(-h_1) + \frac{1}{2}k \times (\ell_1 - \ell_0)^2$
   avec $v_A = v_C = 0$ et $\ell_1 - \ell_0 = h_1$
   $\Longrightarrow \boldsymbol{\frac{1}{2}kh_1^2 - mgh_1 - mgh_0 = 0}$ la résolution de l'équation du 2nd degré donne : $\boldsymbol{h_1 = 6,8\ cm}$

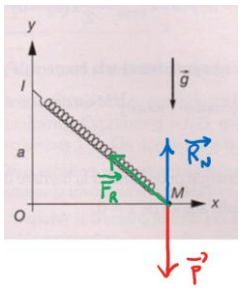
2. Par un raisonnement identique à la question précédente mais entre les points A et D, où D correspond au point de hauteur maximale h_2 atteinte par la boule :

   $\boldsymbol{E_m(A) = E_m(D) \Longrightarrow mgh_0 = mgh_2 + \frac{1}{2}kh_2^2 \Longrightarrow \frac{1}{2}kh_2^2 + mgh_2 - mgh_0 = 0}$

   la résolution de l'équation du 2nd degré donne : $\boldsymbol{h_2 = 5,8\ cm}$
3. $\boldsymbol{h_2 < h_1}$ car le point O n'est pas la position d'équilibre de la boule (à cause de la gravité)

4. Principe d'inertie : à l'équilibre : $\vec{P} + \overrightarrow{F_R} = \vec{0} \Longrightarrow -mg - k \times (\ell_e - \ell_0) = 0 \Longrightarrow -mg - k \times (-h_e) = 0$
   $\Longrightarrow \boldsymbol{h_e = \frac{mg}{k}}$ AN : $\boldsymbol{h_e = 4,9\ mm}$

Exercice 4 : Etude d'un oscillateur



1. **Référentiel :** terrestre supposé galiléen
   Système : point matériel M de masse m
   Hypothèses : forces de frottement solide et fluide (avec l'air) négligées
   Forces extérieures : $\vec{P}$: perpendiculaire au mouvement donc ne travaille pas
   $\overrightarrow{F_R}$: force de rappel élastique = force conservative
   $\overrightarrow{R_N}$: perpendiculaire au mouvement donc ne travaille pas
   TEM : $\Delta E_m = \sum_i W(\overrightarrow{F_{nci}}) = 0 \Longrightarrow$ l'énergie mécanique du point M se conserve

2. $E_p = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$ (à une constante près) avec $\ell = \sqrt{a^2 + x^2}$ (IOM est un triangle rectangle en O)
   On en déduit :
   $E_p = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{a^2 + x^2} - \ell_0\right)^2 = \frac{1}{2}k\left(a^2 + x^2 - 2\ell_0\sqrt{a^2 + x^2} + {\ell_0}^2\right) = \frac{1}{2}kx^2 - k\ell_0(a^2 + x^2)^{\frac{1}{2}}$ à une constante près

3. Recherche des **positions d'équilibre** : $\frac{dE_p}{dx} = 0$
   $\Longrightarrow kx - \frac{1}{2}k\ell_0 \times 2x \times (a^2 + x^2)^{-\frac{1}{2}} = 0 \Longrightarrow x - \ell_0 \times x \times \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} = 0 \Longrightarrow x\left(1 - \ell_0 \times \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right) = 0$
   $\boldsymbol{x = 0}$ ou $1 - \ell_0 \times \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = 0 \Longrightarrow \ell_0 \times \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} = 1 \Longrightarrow \sqrt{a^2 + x^2} = \ell_0 \Longrightarrow a^2 + x^2 = {\ell_0}^2 \Longrightarrow x^2 = {\ell_0}^2 - a^2$
   Si $\boldsymbol{a < \ell_0}$: $\boldsymbol{x = \pm\sqrt{{\ell_0}^2 - a^2}}$ Si $\boldsymbol{a > \ell_0}$: il n'y a pas d'autres solutions
   Bilan : **si $\boldsymbol{a < \ell_0}$, il existe trois positions d'équilibre pour $\boldsymbol{x = 0}$, $\boldsymbol{x = \sqrt{{\ell_0}^2 - a^2}}$ et $\boldsymbol{x = -\sqrt{{\ell_0}^2 - a^2}}$**
   si $\boldsymbol{a > \ell_0}$, il existe une seule position d'équilibre $\boldsymbol{x = 0}$

4. Les positions d'équilibre correspondent aux extrema de la courbe donnant l'énergie potentielle. La position d'équilibre est stable si $\frac{d^2E_p}{dx^2} > 0$, et instable si $\frac{d^2E_p}{dx^2} < 0$. Une position d'équilibre stable correspond donc à un minimum (local) d'énergie potentielle et une position d'équilibre instable à un maximum (local) d'énergie potentielle.

   Courbe 1 : 1 position d'équilibre (pour $x = 0$)

   Courbe 2 : 3 positions d'équilibre, 1 instable (pour $x = 0$), et deux stables (d'après la question précédente pour $x = \sqrt{{\ell_0}^2 - a^2}$ et $x = -\sqrt{{\ell_0}^2 - a^2}$)

Exercice 5 : Inversion de la molécule d'ammoniac

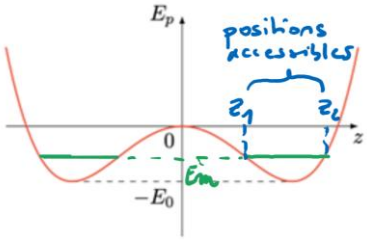
1. $E_p(z) = \beta\left(\frac{z^4}{4} - \frac{a^2z^2}{2}\right) \Longrightarrow F(z) = -\frac{dE_p(z)}{dz} = -\beta(z^3 - a^2z)$

2. **Positions d'équilibre :**
   $\frac{dE_p(z_{eq})}{dz} = 0 \Longrightarrow \beta({z_{eq}}^3 - a^2z_{eq}) = 0 \Longrightarrow \beta z_{eq}({z_{eq}}^2 - a^2) = 0$
   Il existe donc trois positions d'équilibre : $\boldsymbol{z_{eq1} = 0}$ $\boldsymbol{z_{eq2} = a}$ $\boldsymbol{z_{eq3} = -a}$

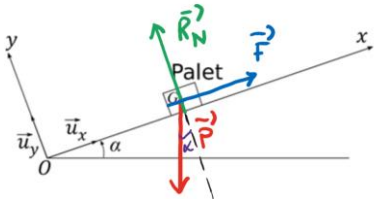
   Stabilité des positions d'équilibre :
   $\frac{d^2E_p(z)}{dz^2} = \beta(3z^2 - a^2)$
   $\frac{d^2E_p(z_{eq1}=0)}{dz^2} = -\beta a^2 < 0$: position d'**équilibre instable** maximum local d'énergie potentielle
   $\frac{d^2E_p(z_{eq2}=a)}{dz^2} = \frac{d^2E_p(z_{eq3}=-a)}{dz^2} = 2\beta a^2 > 0$: position d'**équilibre stable** minimum local d'énergie potentielle

3. Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, appliqué à l'atome d'azote, le théorème de l'énergie mécanique donne : $\Delta E_m = 0$ la seule force extérieure à considérer est la force électromagnétique conservative (car elle dérive d'une énergie potentielle).
   Par conséquent : $\boldsymbol{E_m = cste}$. Or $E_m = E_c + E_p$ et $E_c = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0 \Longrightarrow E_p \leq E_m = cste$

Donc si $E_m = cste \in]-E_0\,;0[$, la trajectoire est alors **bornée**, les **positions accessibles** sont comprises entre z_1 et z_2 (z étant initialement positif) :



Exercice 6 : Glissement et frottement sur la glace

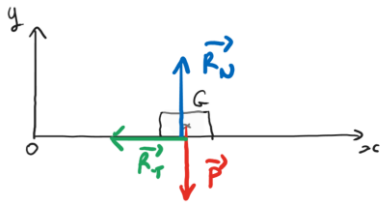


1. **Référentiel :** terrestre supposé galiléen
   Système : palet assimilé à un point matériel de masse m
   Hypothèses : forces de frottement solide et fluide (avec l'air) négligées
   Forces extérieures : $\vec{P}$, $\overrightarrow{R_N}$, $\vec{F}$ durant la phase de propulsion
2. **Principe fondamentale de la dynamique :** $m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \overrightarrow{R_N} + \vec{F}$
   En projection sur l'axe (Ox) : $m\ddot{x} = ma = -mgsin\alpha + F \Longrightarrow \boldsymbol{F = ma + mgsin\alpha}$
3. Mouvement uniformément accéléré $\Longrightarrow a = \frac{dv}{dt} = cste \Longrightarrow v = at \Longrightarrow a = \frac{v}{t}$ (vitesse nulle initialement)
   $\Longrightarrow \boldsymbol{F = m\frac{v}{t} + mgsin\alpha}$ AN : $\boldsymbol{F} = 0{,}160 \times \frac{50}{0{,}5} + 0{,}160 \times 10 \times sin(20) = \mathbf{16{,}5\ N}$

4. Si le palet n'est plus en contact avec la crosse, alors le PFD devient : $m\vec{a} = \vec{P} + \overrightarrow{R_N}$
   En projection sur l'axe (Ox) : $m\ddot{x} = ma = -mgsin\alpha \Longrightarrow \dot{x} = -gsin\alpha t + v_0 \Rightarrow \boldsymbol{x = -\frac{1}{2}gsin\alpha t^2 + v_0 t}$, les conditions initiales étant $\dot{x}(t=0) = v_0$ et $x(t=0) = 0$

5. Lorsque le palet s'arrête à la date t_a : $\dot{x}(t = t_a) = 0 \Longrightarrow -gsin\alpha t_a + v_0 = 0 \Longrightarrow t_a = \frac{v_0}{gsin\alpha}$
   Le palet a parcouru la distance : $d = x(t = t_a) = -\frac{1}{2}gsin\alpha {t_a}^2 + v_0 t_a = -\frac{1}{2}gsin\alpha\left(\frac{v_0}{gsin\alpha}\right)^2 + v_0\frac{v_0}{gsin\alpha} = \frac{v_0^2}{2gsin\alpha}$

6. **L'énoncé devrait préciser qu'il est attendu l'expression du travail de de la composante tangentielle $\overrightarrow{R_T}$ en fonction de f, m et g.**
   En considérant que le palet se déplace sur une distante d' :
   $W(\overrightarrow{R_T}) = \int_0^{d'} \overrightarrow{R_T}\cdot\overrightarrow{d\ell} = \int_0^{d'} -R_T dx = -R_T d'$
   Pour cette phase, le principe fondamental de la dynamique s'écrit : $m\vec{a} = \vec{P} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T}$
   En projection sur l'axe (Oy) : $0 = -mg + R_N + 0 \Longrightarrow R_N = mg \Longrightarrow R_T = f_D R_N = f_D mg$



   Donc : $\boldsymbol{W(\overrightarrow{R_T}) = -f_D mgd'}$

7. **TEC :** $\boldsymbol{\Delta E_c = \sum_i W(\vec{F_i}) = W(\vec{P}) + W(\overrightarrow{R_N}) + W(\overrightarrow{R_T}) = W(\overrightarrow{R_T})}$
   car $\vec{P}$ et $\overrightarrow{R_N}$ ne travaillent pas (droite d'action perpendiculaire au mouvement)

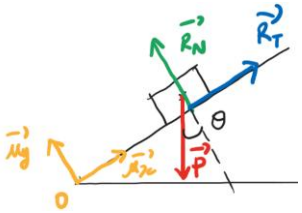
   Remarque *: on pourrait aussi utiliser le TEM*

   On obtient alors : $\frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = -f_D mgd'$ avec $v' = 0$ (arrêt du palet)

   Finalement : $-\frac{1}{2}mv_0^2 = -f_D mgd' \Longrightarrow \boldsymbol{d' = \frac{v_0^2}{2gf_D}}$ **AN :** $\boldsymbol{d' = \frac{50^2}{2\times10\times0{,}050} = 2500\ m}$

8. A l'équilibre : $\vec{P} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T} = \vec{0}$

   En projection sur l'axe (Ox) : $-mgsin\theta + R_T = 0$
   En projection sur l'axe (Oy) : $-mgcos\theta + R_N = 0$



   Or $R_T \leq f_S R_N \Longrightarrow mgsin\theta \leq f_S mgcos\theta \Longrightarrow tan\theta \leq f_S$: il y a alors glissement dès que $\boldsymbol{tan\theta_{lim} = f_S}$
9. AN : $\boldsymbol{f_S = 0{,}57}$