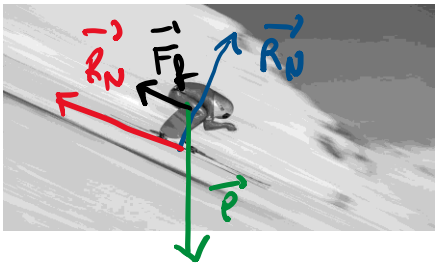
Chapitre 5 : Approche énergétique du mouvement d'un point matériel

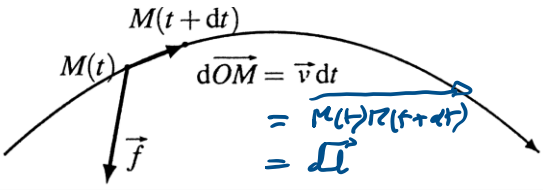
Cadre d'étude : cas d'un système modélisé par un point matériel

I. Puissance, travail et énergie cinétique



1. Puissance et travail d'une force

- **Puissance d'une force**

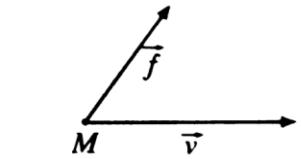


La **puissance de la force** $\vec{f}$ appliquée au point matériel M, animé de la vitesse $\vec{v}$ est définie par :

$$\mathcal{P}(\vec{f}) = \vec{f}.\vec{v} \quad W$$

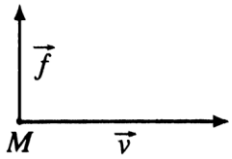
La puissance dépend du référentiel d'étude

- **Caractère moteur ou résistant d'une force**



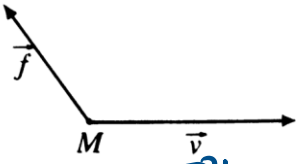
$\mathcal{P}(\vec{f}) > 0$ puissance motrice

$\vec{P}$



$\mathcal{P}(\vec{f}) = 0$

$\vec{R_N}$



$\mathcal{P}(\vec{f}) < 0$ puissance résistante

$\vec{f}$, $\vec{R_T}$

- **Travail élémentaire d'une force**

Le **travail élémentaire de la force** $\vec{f}$ de puissance $P(\vec{f})$, appliquée au point matériel M, pendant un intervalle de temps dt s'écrit :

$$\delta W(\vec{f}) = \mathcal{P}(\vec{f}).dt = \vec{f}.\vec{v}\,dt \Rightarrow \boxed{\delta W = \vec{f}.d\overrightarrow{OM}} \quad J$$

Expression en coordonnées cartésiennes :

$$\delta W = f_x\,dx + f_y\,dy + f_z\,dz$$

- **Travail d'une force au cours d'un déplacement le long d'une trajectoire**

$$W(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f}.d\overrightarrow{OM}$$

Caractère moteur ou résistant d'une force :

$W(\vec{f}) > 0$: travail moteur

$W(\vec{f}) < 0$: travail résistant

Cas du travail d'une force constamment perpendiculaire au mouvement : $W(\vec{f}) = 0$

- **Travail d'une force constante**

$$W(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{OM} = \vec{f} \cdot \int_A^B d\vec{OM} = \vec{f} \cdot \vec{AB}$$

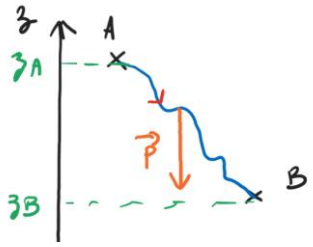
($\vec{f}$ constante ; $\int_A^B d\vec{OM} = \vec{AB}$)

- **Travail d'une force conservative**

> **Toute force dont le travail ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement du point de départ et du point d'arrivée, est une force conservative**

➟ **Application n°1 :**

1) Exprimer le travail du poids (dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme)

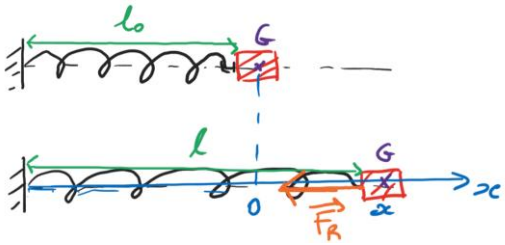


Avec un axe (Oz) vertical orienté vers le haut :

$$\delta W = \vec{P} \cdot \overrightarrow{dOM} = P_x dx + P_y dy + P_z dz = P_z dz = -mgdz$$

$$\Rightarrow W = \int \delta W = \int_{z_A}^{z_B} -mgdz = -mg \times (z_B - z_A) = \boldsymbol{mg \times (z_A - z_B)}$$

2) Exprimer le travail de la force de rappel d'un ressort (de constante de raideur k)



$$\delta W = \overrightarrow{F_R} \cdot \overrightarrow{dOM} = F_{Rx}dx + F_{Ry}dy + F_{Rz}dz = F_{Rx}dx = -k(\ell - \ell_{eq})dx = -kxdx$$

$$\Rightarrow W = \int \delta W = \int_{z_A}^{z_B} -kxdx = -\frac{1}{2}k({x_B}^2 - {x_A}^2) = \boldsymbol{\frac{1}{2}k({x_A}^2 - {x_B}^2)}$$

2. Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen dans le cas d'un système modélisé par un point matériel

- **Définition de l'énergie cinétique**

> L'**énergie cinétique d'un point matériel *M*** (de masse m) de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ est définie par :
>
> $$E_c = \frac{1}{2} m v^2 \quad J$$

Remarque : l'énergie cinétique dépend du référentiel d'étude

- **Théorème de l'énergie cinétique dans un référentiel galiléen**

Enoncé : Dans un **référentiel galiléen**, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail des forces qui s'exercent que ce point (entre ces deux instants) :

Sous forme macroscopique

$$\Delta E_c = \sum_i W(\vec{f}_i)$$

Sous forme infinitésimale

$$dE_c = \sum_i \delta W(\vec{f}_i)$$

Théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i P(\vec{f}_i)$$

Démonstration :

PFD (2nd loi de Newton) : $m\vec{a} = \sum_i \vec{f_i}$

$\Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_i \vec{f_i} \Rightarrow m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \left(\sum_i \vec{f_i}\right)\cdot\vec{v}$

$= \sum_i (\vec{f_i}\cdot\vec{v})$

$\Rightarrow m\frac{1}{2}\frac{dv^2}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f_i})$

$\Rightarrow \frac{d\left(\frac{1}{2}mv^2\right)}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f_i}) \Rightarrow \boxed{\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{f_i})}$

➟ **Application n°2 : Exploitation du théorème de l'énergie cinétique**

Une voiture de masse $m = 1{,}5 \times 10^3 kg$ *roule à la vitesse de* $50\ km.h^{-1}$ *sur une route horizontale. Devant un imprévu, le conducteur freine brutalement et s'arrête sur une distance* $d = 15\ m$. *On modélise la force de freinage par une force constante opposée à la vitesse.*

Calculer le travail ainsi que la norme de la force de freinage

$\boldsymbol{W(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{AB} = -F \times (x_f - x_0) = -Fd}$

Référentiel : terrestre (galiléen) **Système** : {voiture} assimilé à un point matériel de masse m **Forces extérieures :** $\vec{P}$, $\vec{N}$, $\vec{F}$

TEC : $\Delta E_c = \sum_i W(\vec{F_i}) = W(\vec{F}) + W(\vec{P}) + W(\vec{N})$

avec $W(\vec{P}) = W(\vec{N}) = 0$, $\vec{P}$ et $\vec{N}$ étant perpendiculaire au mouvement

$\Longrightarrow \Delta E_c = W(\vec{F}) \Longrightarrow E_{cf} - E_{ci} = -Fd$ avec $E_{cf} = 0$, la vitesse finale étant nulle

$\Longrightarrow -\frac{1}{2}mv_i{}^2 = -Fd \Longrightarrow \boldsymbol{F = \frac{mv_i^2}{2d}}$ AN : $\boldsymbol{F = 9{,}7\ kN}$

II. Champ de force conservative et énergie potentielle

1. Force conservative et énergie potentielle

Définition : $\vec{F}$ est une **force conservative** s'il existe une fonction E_P, appelée **énergie potentielle**, telle que :

$$\delta W(\vec{F_c}) = -dE_p$$

Retour sur la propriété du travail d'une force conservative :

le travail d'une force conservative ne dépend pas du chemin suivi, mais uniquement du point de départ et du point d'arrivée

$$W(\vec{F_c}) = \int \delta W(\vec{F_c}) = \int_{E_{pA}}^{E_{pB}} -dE_p = (E_p(B) - E_p(A)) = E_p(A) - E_p(B)$$

Remarque : Une force qui dépend de la vitesse (exemple de la force de frottement fluide) n'est jamais conservative. Les forces constantes et les forces qui ne dépendent que de la position sont en générales conservatives.

2. Expressions de l'énergie potentielle de pesanteur et de l'énergie potentielle élastique

⟶ Application n°3 :

1. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur (dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme)

$\delta W(\vec{P}) = \vec{P} \cdot d\vec{OM} = -mg\,dz = -dE_{pp}$ ↑z

$\Rightarrow E_{pp} = mgz + cste$ ↑z $\Rightarrow$ **$E_{pp} = mgz + cste$** ↑z

2. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle élastique (pour un ressort de de constante de raideur k)

$\delta W(\vec{F_R}) = \vec{F_R} \cdot d\vec{OM} = -k(\ell - \ell_0) \times dx = -dE_{pe}$

$\Rightarrow E_{pe} = \frac{1}{2} k x^2 + cste \Rightarrow$ **$E_{pe} = \frac{1}{2} k (\ell - \ell_0)^2 + cste$**

3. Relation entre la force conservative $\vec{F}$ et la dérivée spatiale de l'énergie potentielle E_P dans un cas unidimensionnel

- **Cas du poids et la force de rappel élastique d'un ressort :**

$\vec{P} = -\frac{dE_{pp}}{dz}\vec{u_z}$		
$\vec{F_R} = -\frac{dE_{pe}}{dx}\vec{u_x}$	cas général : $\vec{F_R} = -\frac{dE_{pe}}{d\ell}\vec{u}$	($\vec{u}$ dans le sens de l'allongement du ressort)

- **Sens de la force et variation d'énergie potentielle :**

Cas où $\vec{F} = F(x)\vec{u_x}$:	$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{u_x}$

Signe de $\frac{dE_p}{dx}$	> 0	< 0	$= 0$ cst
Sens de $\vec{F}$	$\vec{F}$	$\vec{F}$	$= \vec{0}$
Conclusion	$\vec{F}$ est dirigée dans le sens des E_p ↓.		

- **Remarque : dans le cas où le système ne dépend que de la coordonnées cylindrique ou sphérique r : $\vec{F} = F(r)\vec{u_r}$**

$$\vec{F} = -\frac{dE_p}{dr}\vec{u_r}$$

⟶ Application n°4 : Exploitation de la relation entre la force et la dérivée spatiale de l'énergie potentielle

1. Déterminer l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur (dans un champ de pesanteur $\vec{g}$ uniforme)

Avec un axe (Oz) vertical orienté vers le haut :

$$\vec{P} = -\frac{dE_{pp}}{dz}\vec{u_z} \Rightarrow -mg\vec{u_z} = -\frac{dE_{pp}}{dz}\vec{u_z} \Rightarrow \frac{dE_{pp}}{dz} = mg \Rightarrow \boldsymbol{E_{pp} = mgz + cste}$$

2. Déterminer l'expression de la force de rappel élastique $\vec{F_R} = -\frac{dE_{pe}}{dx}\vec{u_x} = -kx\vec{u_x}$

III. Energie mécanique

1. Définition de l'énergie mécanique

L'**énergie mécanique** d'un point matériel est la somme de l'énergie cinétique et des énergies potentielles :

$$E_m = E_c + \sum_i E_{pi}$$

2. Théorème de l'énergie mécanique

- **Enoncé**

Dans un référentiel **galiléen**, la variation d'énergie mécanique au cours du mouvement entre deux instants est égale aux travaux des forces non conservatives (qui ne dérivent pas d'une énergie potentielle) :

En terme d'énergie :

Sous forme intégrale : $\Delta E_m = \sum_i W(\vec{F}_{nc\,i})$

Sous forme infinitésimale : $dE_m = \sum_i \delta W(\vec{F}_{nc\,i})$

En terme de puissance : $\dfrac{dE_m}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_{nc\,i})$

- **Démonstration**

$$dE_m = dE_c + \sum_i dE_{pi} = \sum_i \delta W(\vec{F}) - \sum_i \delta W(\vec{F}_{c\,i})$$

$$\Rightarrow dE_m = \sum_i \delta W(\vec{F}_{nc\,i})$$

3. Mouvement conservatif

Mouvement conservatif

En présence de forces conservatives $\overrightarrow{F_c}$ et/ou à des forces ne travaillant pas $\overrightarrow{F_0}$:

$dE_m = 0 \Rightarrow E_m = cst$ mouvement conservatif

Mouvement dissipatif :

En présence de forces non conservatives $\overrightarrow{F_{nc}}$ qui travaillent :

$dE_m = \delta W(\vec{F}_{nc}) < 0 \Rightarrow E_m \downarrow$ mouvement dissipatif

⟶ Application n°5 : Exploitation du théorème de l'énergie mécanique

Un adulte (m=70kg) descend un toboggan d'une hauteur h=5,0m faisant un angle α=45° avec le sol. On prendra $g = 9{,}8\ \mathrm{m.s^{-2}}$

1) Déterminer la vitesse de la personne en bas du toboggan en absence de frottement.

Référentiel : terrestre (galiléen)
Système : {adulte} assimilé à un point matériel de masse m
Forces extérieures : $\vec{P}$: conservative
$\vec{N}$: ne travaille pas (perpendiculaire au mouvement)

TEM : $\Delta E_m = \sum_i W(\overrightarrow{F_{nci}}) = 0$

$\Longrightarrow E_{mi} = E_{mf} \Longrightarrow E_{ci} + E_{pi} = E_{cf} + E_{pf} \Longrightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + mgz_i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgz_f$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 = mg \times (z_i - z_f)$ car $v_i = 0$

$\Longrightarrow v_f = \sqrt{2g(z_i - z_f)} = \sqrt{2gh}$ AN : $\boldsymbol{v_f = 9{,}9\ m \cdot s^{-1}}$

2) En réalité il s'exerce une force de frottement $\vec{T}$ dont la norme est $\|\vec{T}\| = f\|\vec{R}\|$, où $f = 0{,}40$ est le coefficient de frottement et $\vec{R}$ la réaction normale. Déterminer alors la vitesse de la personne en prenant en compte cette force de frottement.

En présence de la force de frottement, une force non conservative :
$\boldsymbol{\Delta E_m = W(\vec{T})}$

$W(\vec{T}) = -T \times AB = -T \times \frac{h}{sin(\alpha)} = -\frac{fRh}{sin(\alpha)}$

Expression de R :
En projetant les forces sur l'axe (Oy) : $R - mgcos(\alpha) = 0 \Longrightarrow R = mgcos(\alpha)$

$\Longrightarrow \boldsymbol{W(\vec{T})} = -\frac{fRh}{\sin(\alpha)} = -\frac{fhmgcos(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \boldsymbol{-\frac{mghf}{\tan(\alpha)}}$

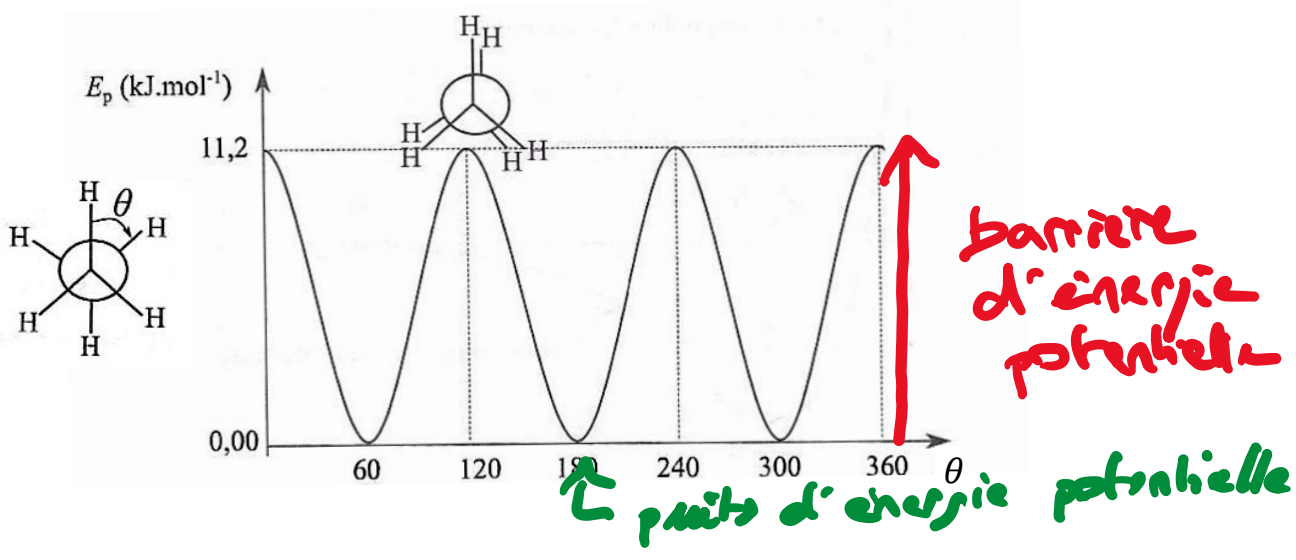
$\boldsymbol{\Delta E_m} = \left(\frac{1}{2}mv_f^2 + mgz_f\right) - \left(\frac{1}{2}mv_i^2 + mgz_i\right) = \boldsymbol{\frac{1}{2}mv_f^2 + mg \times (z_f - z_i)}$

$\Longrightarrow \frac{1}{2}mv_f^2 + mg \times (z_f - z_i) = -\frac{mghf}{\tan(\alpha)} \Longrightarrow \boldsymbol{v_f} = \sqrt{2 \times \left(gh - \frac{ghf}{\tan(\alpha)}\right)} = \boldsymbol{\sqrt{2gh \times \left(1 - \frac{f}{\tan(\alpha)}\right)}}$

AN : $\boldsymbol{v_f = 7{,}7\ m \cdot s^{-1}}$

IV. Mouvement conservatif à un degré de liberté

- **<u>Barrière et puits d'énergie potentielle</u>**



- **Trajectoire bornée ou non, Positions accessibles, Points de vitesse nulle**

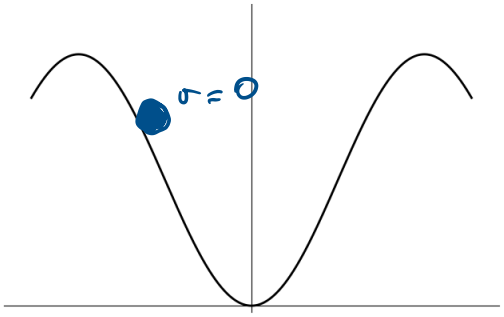
Position du problème :

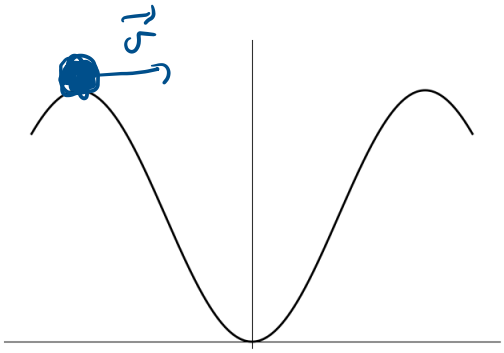
* on considère un point matériel M de masse m soumis à une seule force $\vec{F}$ conservative selon un axe $\vec{u_x}$: $\vec{F} = -\frac{dE_p}{dx}\vec{u_x}$.

* TEM : $\Delta E_m = \sum W(\vec{F_{nc_i}}) = 0 \Rightarrow E_m = cste$ (mouvement conservatif)

$\Rightarrow E_c + E_p = E_m = cste \Rightarrow E_p = E_m + E_c \Rightarrow \boxed{E_p \leq E_m}$

$E_c = \frac{1}{2}mv^2 \geq 0$; $E_c \geq 0$





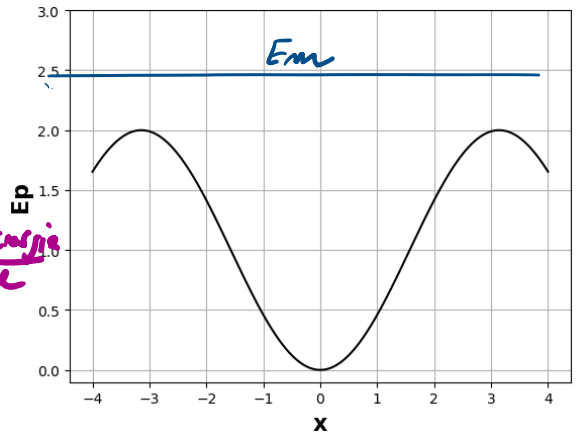


$E_m = E_p$
$\Rightarrow E_c = 0$
$\Rightarrow v = 0$
points de vitesse nulle

trajectoire bornée

Seules positions accessibles : $x \in [x_1 ; x_2]$

position d'équilibre

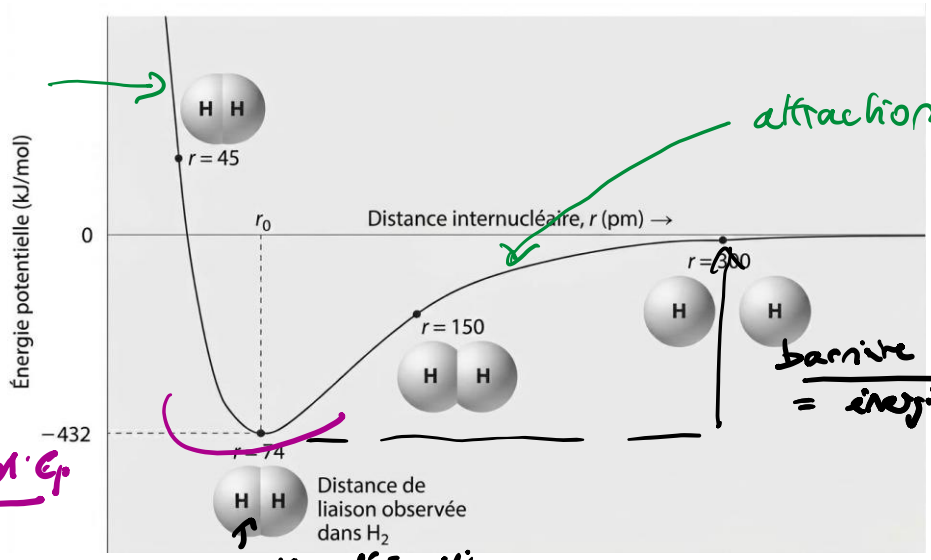


trajectoire non bornée
= Toutes les positions de x sont accessibles par M

- **Application à la liaison chimique**

répulsion

attraction



puits d'Ep

barrière d'Ep = énergie de liaison

position d'équilibre

4. Positions d'équilibre et Stabilité

Définitions

Un point matériel est en **équilibre** lorsque sa vitesse est nulle à tout instant $\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} = \vec{0}$

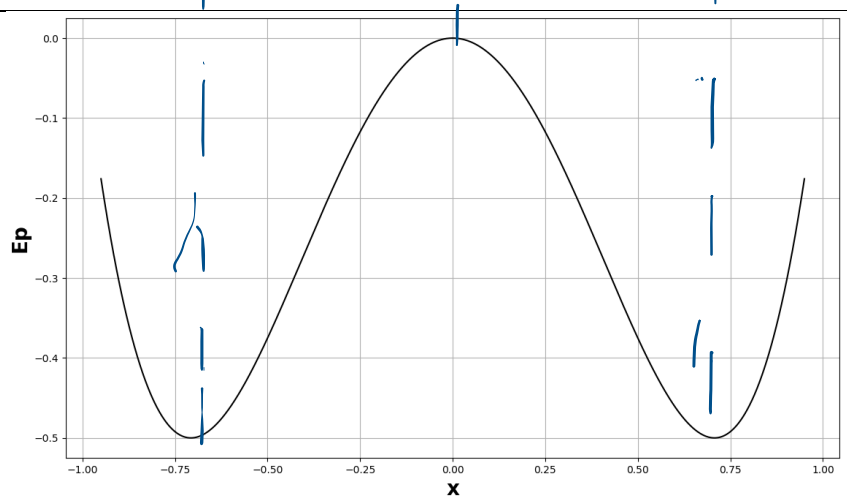
$$\left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_{eq}} = 0$$

Si on écarte le point matériel de sa position d'équilibre :

L'équilibre sera **stable** s'il revient vers sa position d'équilibre $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}} > 0$

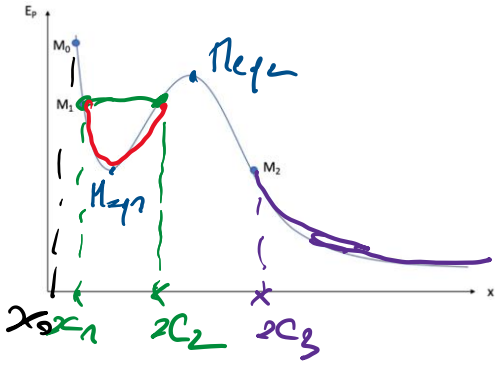
L'équilibre sera **instable** s'il s'écarte définitivement de sa position d'équilibre initiale $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}} < 0$

Analyse graphique

Signe de $\frac{dE_p}{dx}$	− 0 + 0 − 0 +
Sens de $\vec{F}$	$\vec{F}$ → ; $\vec{F}$ ← ; $\vec{F}$ → ; $\vec{F}$ ←
$\vec{F}$ tend à ramener le système vers une position d'équilibre stable	
Signe de $\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_{eq}}$	> 0 ; < 0 ; > 0
Stabilité de l'équilibre	stable ; instable ; stable

⟶ Application n°6 :

Une particule M soumise à l'action d'une force conservative $\vec{F}$ est astreinte à se déplacer le long d'un axe horizontal (Ox). Le graphe donnant les variations de l'énergie potentielle en fonction de x est le suivant :



1. Déterminer qualitativement les positions d'équilibre du système. Préciser s'il s'agit de positions stables ou instables.

Meq1 → stable

Meq2 → instable

2. Décrire le mouvement de la particule si elle est abandonnée en M_1 sans vitesse initiale. Même question en M_2 puis en M_0.

M1 : trajectoire bornée entre x_1 et x_2

M2 : trajectoire non bornée vers + ∞ : $x \in [x_3 ; +\infty[$
les x croissants

M0 : " : $x \in [x_0 ; +\infty[$

Les questions à se poser à l'issue de ce chapitre

Cours de 1ère année

- Est-ce que je sais citer les 3 lois de Newton ?
- Est-ce que je sais établir les équations horaires du mouvement et l'équation de la trajectoire dans le cas d'un mouvement dans un champ de pesanteur uniforme ?
- Est-ce que je sais établir et résoudre dans le cas du modèle d'une force de frottement fluide linéaire en vitesse, l'équation différentielle du mouvement faisant apparaître la constante de temps du phénomène ainsi que la vitesse limite ?
- Est-ce que je sais à quoi correspond les lois de Coulomb ?

Puissance et travail d'une force

- Est-ce que je connais l'expression de la puissance et du travail d'une force ?
- Est-ce que je sais établir l'expression du travail du poids ? de la force de rappel d'un ressort ?

Energie potentielle, énergie mécanique, Théorème de l'énergie cinétique, Théorème de l'énergie mécanique

- Est-ce que je connais le lien entre champ de forces conservatives et énergie potentielle (cas unidimensionnel) ?
- Est-ce que je connais l'expression de l'énergie mécanique ?
- Est-ce que je sais citer le théorème de l'énergie cinétique ? Est-ce que je sais l'utiliser pour déterminer un travail ou une vitesse ?
- Est-ce que je sais citer le théorème de l'énergie mécanique ? Est-ce que je sais l'exploiter pour étudier un mouvement conservatif ?
- Dans quel cas faut-il étudier un problème de mécanique à l'aide d'un théorème énergétique ?

Mouvement conservatif à un degré de liberté

Sur un graphe d'énergie potentielle :

- est-ce que je sais identifier une barrière et un puits d'énergie potentielle ?
- est-ce que je sais décrire qualitativement le comportement d'un système : trajectoire bornée ou non, positions accessibles, positions de vitesse nulle.
- est-ce que je sais reconnaître l'existence de positions d'équilibre et analyser qualitativement la nature stable ou instable de ces positions