DM2 – Correction

Conduction thermique

1. Les trois couches (vitre-air-vitre) sont traversées par le même transfert thermique. Les résistances thermiques des deux vitres et de la couche d'air, constituant la fenêtre double vitrage, sont donc associées en série :

   $\boldsymbol{R_{th} = 2R_{thv} + R_{tha}} = 2 \times \frac{e_v}{\lambda_v S} + \frac{e_a}{\lambda_a S}$
   AN : $\boldsymbol{R_{th}} = 2 \times \frac{5\times10^{-3}}{1\times1} + \frac{10\times10^{-3}}{0{,}02\times1} = 10^{-2} + 5 \times 10^{-1} = \boldsymbol{0{,}51\ K \cdot W^{-1}}$

2. Les 6 fenêtres sont identiques et soumises au même écart de température. Les résistances thermiques des 6 fenêtres sont donc associées en dérivation :

   $\frac{1}{R_{th,tot}} = 6 \times \frac{1}{R_{th}} \Longrightarrow \boldsymbol{R_{th,tot} = \frac{R_{th}}{6}}$ AN : $\boldsymbol{R_{th,tot} \approx 0{,}085\ K \cdot W^{-1}}$

3. Soit P la puissance thermique recherchée.

   $\boldsymbol{P = \frac{\theta_0 - \theta_{ext}}{R_{th,tot}}}$ AN : $\boldsymbol{P = \frac{20}{0{,}02} = 1{,}0\ kW}$

4. **Système** : chalet

   1er principe : $dU = \delta W_P + \delta W' + \delta Q = \delta Q$

   avec $\delta W' = 0$ (pas de pièce mobile)
   $\delta W_P = 0$ ($V = cst$ donc pas de travail des forces pressantes)
   $dU = CdT$

   $\Longrightarrow dU = CdT = \delta Q = -\Phi_{th}dt = -\frac{T - T_{ext}}{R_{th,tot}}dt \Longrightarrow CdT = -\frac{T - T_{ext}}{R_{th,tot}}dt$
   $\Longrightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{T}{R_{th,tot}C} = \frac{T_{ext}}{R_{th,tot}C}$

   Résolution de l'équation différentielle du 1er ordre : $T(t) = K \times e^{-\frac{t}{R_{th,tot}C}} + T_{ext}$

   Condition initiale : $T(t=0) = T_0 = K + T_{ext} \Longrightarrow K = T_0 - T_{ext}$

   $\Longrightarrow T(t) = (T_0 - T_{ext}) \times e^{-\frac{t}{R_{th,tot}C}} + T_{ext}$

   $\Longrightarrow \boldsymbol{\theta(t) = (\theta_0 - \theta_{ext}) \times e^{-\frac{t}{R_{th,tot}C}} + \theta_{ext}}$

   AN : $\boldsymbol{\theta(t = 1\ jour) = (20 - 0) \times e^{-\frac{86400}{60000}} + 0 = 4\ °C}$

Mécanique du point

Exercice 1

1. **Système** : {frisbee} de masse m assimilé à un point matériel
   Référentiel : terrestre supposé galiléen
   Bilan des forces extérieures : $\vec{P}$

   Principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = \vec{P} = m\vec{g} \Longrightarrow \vec{a} = \vec{g}$
   En projection sur l'axe (Ox) : $\ddot{x} = 0$
   sur l'axe (Oy) ascendant : $\ddot{y} = -g$
   En primitivant : $\dot{x} = V_0 cos\alpha$ $\dot{y} = -gt + V_0 sin\alpha$
   En primitivant de nouveau et en prenant l'origine du repère, la position initiale du frisbee :
   $\boldsymbol{x(t) = V_0 cos\alpha t}$ $\boldsymbol{y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + V_0 sin\alpha t}$

2. $t = \frac{x}{V_0 cos\alpha} \Longrightarrow y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{V_0 cos\alpha}\right)^2 + V_0 sin\alpha \times \frac{x}{V_0 cos\alpha}$

$\Longrightarrow \boldsymbol{y = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{V_0 cos\alpha}\right)^2 + tan\alpha x}$

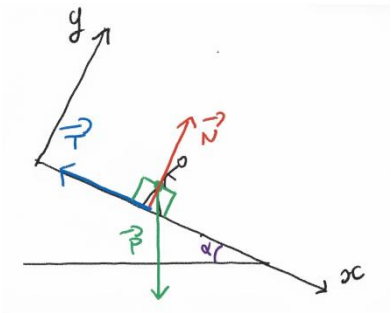
3. $y(x = D) = 0 \Longrightarrow -\frac{1}{2} g \left(\frac{D}{V_0 cos\alpha}\right)^2 + tan\alpha D = 0 \Longrightarrow -\frac{g}{2 \times V_0^2 \times cos^2\alpha} D + tan\alpha = 0$

$\Longrightarrow \frac{g}{2 \times V_0^2 \times cos^2\alpha} D = tan\alpha \Longrightarrow V_0^2 = \frac{gD}{2 \times cos^2\alpha \times tan\alpha} = \frac{gD}{2 \times cos\alpha \times sin\alpha} \Longrightarrow \boldsymbol{V_0 = \sqrt{\frac{gD}{2 \times cos\alpha \times sin\alpha}}}$

AN : $\boldsymbol{V_0 = \sqrt{\frac{10 \times 10}{2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}}} = 10\ m \cdot s^{-1}}$

Exercice 2 avec $\boldsymbol{f = 0,055}$

1. **Système** : {skieur} de masse m assimilé à un point matériel
Référentiel : terrestre supposé galiléen
Bilan des forces extérieures s'exerçant sur le skieur :



Poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

Réaction du support : $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$

Principe fondamental de la dynamique (PFD) : $m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{N}$

Projection sur l'axe (Oy) : $0 = -mgcos\alpha + \|\vec{N}\| \Longrightarrow \boldsymbol{\|\vec{N}\| = mgcos\alpha}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\| = fmgcos\alpha}$

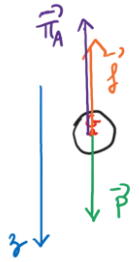
AN : $\boldsymbol{\|\vec{N}\| = 80 \times 10 \times 0,7 = 5,6 \times 10^2\ N}$ $\qquad$ $\boldsymbol{\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\| = 0,055 \times 5,6 \times 10^2 \approx 30\ N}$

2. Le bilan des forces extérieures est identique. La projection du PFD sur l'axe (Ox) donne :
$m\ddot{x} = +mgsin\alpha - \|\vec{T}\| = mgsin\alpha - 20fmgcos\alpha \Longrightarrow \ddot{x} = gsin\alpha - 20fgcos\alpha$
$\Longrightarrow \boldsymbol{\dot{x}(t) = (gsin\alpha - 20fgcos\alpha) \times t + v_0}$
$\Longrightarrow \boldsymbol{x(t) = (gsin\alpha - 20fgcos\alpha) \times \frac{t^2}{2} + v_0 t}$

Le skieur s'arrête au temps t' lorsque : $\dot{x}(t = t') = 0 \Longrightarrow (gsin\alpha - 20fgcos\alpha) \times t' + v_0 = 0$
$\Longrightarrow \boldsymbol{t' = \frac{v_0}{20fgcos\alpha - gsin\alpha}}$
On en déduit la distance d'arrêt D :
$D = x(t = t') = (gsin\alpha - 20fgcos\alpha) \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{v_0}{20fgcos\alpha - gsin\alpha}\right)^2 + \frac{{v_0}^2}{20fgcos\alpha - gsin\alpha}$
$\boldsymbol{D = \frac{{v_0}^2}{2} \times \frac{1}{20fgcos\alpha - gsin\alpha}}$ $\qquad$ AN : $\boldsymbol{D = \frac{14^2}{2} \times \frac{1}{20 \times 0,055 \times 10 \times 0,7 - 10 \times 0,7} = 140\ m}$

Exercice 3

1. **Référentiel** : terrestre supposé galiléen
   Système : {globule rouge} assimilé à une sphère de masse $m = \frac{4}{3}\mu_0\pi R^3$ assimilé à un point matériel
   Bilan des forces extérieures s'exerçant sur le globule rouge :



   Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = \frac{4}{3}\mu_0\pi R^3\vec{g}$

   Force de frottement : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$

   Poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\Pi_A} = -m_{fluide\ déplacé}\vec{g} = -\frac{4}{3}\mu\pi R^3\vec{g}$

   Principe fondamental de la dynamique : $m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \overrightarrow{\Pi_A} + \vec{f}$

En projection sur l'axe (Oz) descendant : $\frac{4}{3}\mu_0\pi R^3\frac{dv_z}{dt} = \frac{4}{3}\mu_0\pi R^3 g - \frac{4}{3}\mu\pi R^3 g - \alpha v_z \Longrightarrow \frac{dv_z}{dt} + \frac{\alpha}{\frac{4}{3}\mu_0\pi R^3}v_z = g\left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)$

$v = v_z \Longrightarrow \boldsymbol{\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{\frac{4}{3}\mu_0\pi R^3}v = g\left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)}$

2. La résolution de l'équation différentielle donne : $v = Kexp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{\frac{4}{3}\mu_0\pi R^3}{\alpha} \times g \times \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)$ avec $\tau = \frac{\frac{4}{3}\mu_0\pi R^3}{\alpha}$

   $\lim\limits_{t\to+\infty} v = \frac{\frac{4}{3}\mu_0\pi R^3}{\alpha} \times g \times \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)$

   $\Longrightarrow \boldsymbol{v_\infty = \tau \times g \times \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right) = \frac{\frac{4}{3}\mu_0\pi R^3}{\alpha} \times g \times \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right) = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3}{\alpha} \times g \times (\mu_0 - \mu)}$

3. $v_{lim} = \frac{H}{\Delta t_{sed}} \Longrightarrow \boldsymbol{\Delta t_{sed} = \frac{H}{v_{lim}} = \frac{H}{\tau \times g \times \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)} = \frac{H}{\frac{4}{3}\mu_0\pi R^3 \times g \times \left(1 - \frac{\mu}{\mu_0}\right)} \Longrightarrow \Delta t_{sed} = \frac{3\alpha H}{4\pi R^3 \times g \times (\mu_0 - \mu)}}$

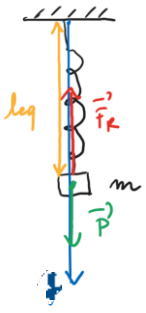
   AN : $\boldsymbol{\Delta t_{sed} = \frac{3\times10^{-8}\times10\times10^{-2}}{4\pi\times(1\times10^{-6})^3\times10\times(1100-1000)} = \frac{3\times10^6}{4\pi} \approx 0,25 \times 10^6\ s}$

   $\boldsymbol{\tau = \frac{\frac{4}{3}\mu_0\pi R^3}{\alpha} = \frac{\frac{4}{3}\times1100\times\pi\times(1\times10^{-6})^3}{10^{-8}} \Longrightarrow \tau \approx 4,4 \times 10^{-7}\ s}$

   $\tau \ll T$: le régime permanent est donc bien atteint très rapidement.

Exercice 4 **avec un axe (Oy) descendant pour tout l'exercice**

1. **Système** : {singe} assimilé à un point matériel de masse m



   Référentiel : terrestre supposé galiléen

   Bilan des forces extérieures :

   Poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

   Force de rappel de la liane (ressort) : $\overrightarrow{F_R} = -k \times (\ell - \ell_0)\overrightarrow{u_y}$ avec un axe (Oy) vertical descendant

   A l'équilibre : $\vec{P} + \overrightarrow{F_R} = \vec{0}$

   En projection sur l'axe (Oy) : $mg - k \times (\ell_{eq} - \ell_0) = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$

   AN : $\boldsymbol{\ell_{eq} = 1 + \frac{10\times10}{200} = 1,5\ m}$

Remarque : avec un (Oy) orienté vers le haut, la projection du principe d'inertie devient :
$\boldsymbol{-mg + k \times (\ell_{eq} - \ell_0) = 0 \Longrightarrow \ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$

2. Bilan des forces extérieures identiques avec :

Poids : $\vec{P} = m\vec{g}$

Force de rappel de la liane (ressort) : $\overrightarrow{F_R} = -k \times (\ell - \ell_0)\overrightarrow{u_y}$ avec un axe (Oy) vertical descendant

Principe fondamental de la dynamique : $\boldsymbol{m\vec{a} = \vec{P} + \overrightarrow{F_R}}$

En projection sur l'axe (Oy) : $m\ddot{y} = mg - k \times (\ell - \ell_0)$

$y = \ell - \ell_{eq} \Longrightarrow \ell = y + \ell_{eq} \Longrightarrow m\ddot{y} = mg - k \times (y + \ell_{eq} - \ell_0)$

Or $\ell_{eq} - \ell_0 = \frac{mg}{k} \Longrightarrow m\ddot{y} = mg - k \times \left(y + \frac{mg}{k}\right) \Longrightarrow m\ddot{y} = -ky \Longrightarrow \boldsymbol{\ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0}$ et $\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

AN : $\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{200}{10}} \approx 4,5\ rad \cdot s^{-1}}$

Remarque : avec un (Oy) orienté vers le haut, la projection du principe fondamental de la dynamique devient :

$\boldsymbol{m\ddot{y} = -mg + k \times (\ell - \ell_0)}$

$\boldsymbol{y = \ell_{eq} - \ell} \Longrightarrow \ell = \ell_{eq} - y \Longrightarrow m\ddot{y} = -mg + k \times (\ell_{eq} - y - \ell_0)$

Or $\ell_{eq} - \ell_0 = \frac{mg}{k} \Longrightarrow m\ddot{y} = -mg + k \times \left(-y + \frac{mg}{k}\right) \Longrightarrow \boldsymbol{m\ddot{y} = -ky} \Longrightarrow \ddot{y} + \frac{k}{m}y = 0$

3. $\boldsymbol{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}}$ AN : $\boldsymbol{T_0 = \frac{2 \times 3,14}{4,5} \approx 1,5\ s}$

4. La solution de l'équation différentielle s'écrit :

$\boldsymbol{y(t) = A'cos(\omega_0 t) + B'sin(\omega_0 t)}$

Conditions initiales : $y(t = 0) = \boldsymbol{A = A'}$ $\boldsymbol{\dot{y}(t = 0) = 0}$

Par ailleurs la vitesse s'écrit :
$\boldsymbol{\dot{y}(t) = -A'\omega_0 sin(\omega_0 t) + B'\omega_0 cos(\omega_0 t)}$

$\dot{y}(t = 0) = B' \times \omega_0 = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{B' = 0}$

Bilan : $\boldsymbol{y(t) = Acos(\omega_0 t)}$

5. $\boldsymbol{\dot{y}(t) = -A\omega_0 sin(\omega_0 t)}$

Donc la vitesse maximale est atteinte pour $sin(\omega_0 t) = \pm 1 \Longrightarrow \boldsymbol{v_{max} = |\dot{y}_{max}| = A\omega_0}$

AN : $\boldsymbol{v_{max} \approx 10 \times 10^{-2} \times 4,5 = 0,45\ m \cdot s^{-1}}$