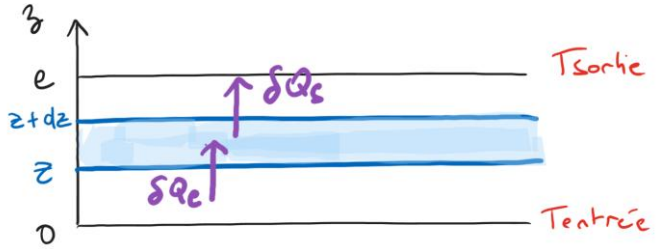
TD Physique n°4 : Phénomènes de transport – Conduction thermique

Exercice 1 : Calcul de résistances thermiques

1. **Système** : ▭ tranche d'épaisseur comprise entre z et z+dz, étudiée entre t et t+dt



Bilan d'énergie : transformation monobare ($P_i = P_f = P_{ext}$ = cste) $\Longrightarrow dH = \delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s$

En régime stationnaire : $dH = 0 \Longrightarrow \delta Q_e - \delta Q_s = 0 \Longrightarrow \delta Q_e = \delta Q_s$

$\delta Q_e = \Phi_{th}(z)dt$ et $\delta Q_s = \Phi_{th}(z+dz)dt \Longrightarrow \Phi_{th}(z)dt = \Phi_{th}(z+dz)dt \Longrightarrow \Phi_{th}(z) = \Phi_{th}(z+dz)$

$\Longrightarrow \Phi_{th} = cst$: le flux se conserve

Loi de Fourier : $\Phi_{th} = -\lambda \frac{dT}{dx} S$

$$\Longrightarrow dT = -\frac{\Phi_{th}}{\lambda S} dz \Longrightarrow \int_{T_{entrée}}^{T_{sortie}} dT = -\frac{\Phi_{th}}{\lambda S} \int_0^e dx \Longrightarrow (T_{sortie} - T_{entrée}) = -\frac{\Phi_{th}}{\lambda S} \times e$$

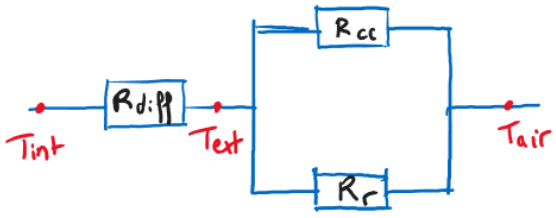
$$\boldsymbol{R_{th}} = \frac{T_{amont} - T_{aval}}{\Phi_{th}} = \frac{T_{entrée} - T_{sortie}}{\Phi_{th}} = \frac{e}{\lambda S} = \boldsymbol{\frac{e}{\lambda HL}}$$

2. Les 6 faces sont en // : $\frac{1}{\boldsymbol{R_{diff}}} = \frac{4}{\boldsymbol{R_{dos}}} + \frac{2}{\boldsymbol{R_{avant}}} \Longrightarrow R_{diff} = \frac{1}{\frac{4}{R_{dos}} + \frac{2}{R_{avant}}}$

avec $R_{dos} = \frac{e}{\lambda_{laine} HL}$ $(S = HL)$ et $R_{avant} = \frac{e}{\lambda_{laine} H^2}$ $(S = H^2)$

AN : $\boldsymbol{R_{diffm}} = 0{,}9\ \boldsymbol{K \cdot W^{-1}}$ $\boldsymbol{R_{diffM}} = 1{,}8\ \boldsymbol{K \cdot W^{-1}}$

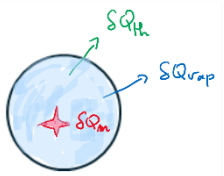
3. **Schéma électrique équivalent** :



La résistance équivalente s'écrit alors : $R_{eq} = \frac{T_{int} - T_{air}}{\Phi_{th}} = R_{diff} + \frac{R_{cc} R_r}{R_{cc} + R_r}$ avec $\Phi_{th} = \Phi_{diff}$

AN : $\boldsymbol{R_1} = 1{,}9\ \boldsymbol{K \cdot W^{-1}}$ $\boldsymbol{R_2} = 0{,}17\ \boldsymbol{K \cdot W^{-1}}$

4. **Système** : brebis ▭



Transformation monobare $\Longrightarrow dH = \delta Q = \delta Q_{reçu} - \delta Q_{perdu} = \delta Q_m - (\delta Q_{th} + \delta Q_{vap})$

Attention : ici tous les transferts thermiques sont comptés positivement

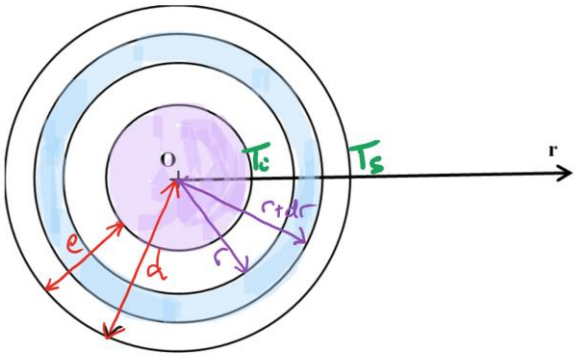
Régime stationnaire : $dH = 0 \Longrightarrow \delta Q_m = \delta Q_{th} + \delta Q_{vap}$

$\Longrightarrow p_{m0} = \Phi_{th} + \Phi_{vap} \Longrightarrow p_{m0} = \frac{T_{int} - T_{air}}{R_1} + m \times \Delta H^0_{vap}$ $AN : p_{m0} = 18\ W$

5. $p'_{m0} = \frac{T_{int} - T_{air}}{R_2} + m' \times \Delta H^0_{vap}$ $AN : p'_{m0} = 200\ W$

Exercice 2 : Mise en chambre d'un vin en bouteille

1. **Système :** coquille cylindrique comprise entre deux cylindres de rayons r et $r + dr$ où $d - e \leq r \leq d$, étudiée entre les instants t et $t + dt$



En régime stationnaire et en l'absence de sources internes ou de pertes thermiques autres que par conduction thermique, le flux conductif se conserve : $\boldsymbol{\Phi_{cond} = cst}$

Loi de Fourier : $\Phi_{cond} = -\lambda S \frac{dT}{dr} = -\lambda \times 2\pi r H \times \frac{dT}{dr}$

Φ_{th} étant constant (en notant T_i est la température à l'intérieur de la bouteille)

$\Longrightarrow R_{cond} = \frac{T_{amont} - T_{aval}}{\Phi_{cond}} = \frac{T_i - T_S}{\Phi_{cond}} \Longrightarrow R_{cond} = \frac{1}{2\pi\lambda H} \times ln\left(\frac{d}{d-2e}\right)$ (>0)

$\Longrightarrow R_{cond} = 7{,}7 \times 10^{-2}\ K \cdot W^{-1}$

2. $\Phi_{conv} = \frac{T_{amont} - T_{aval}}{R_{conv}} \Longrightarrow hS(T_S - T_A) = \frac{T_S - T_A}{R_{conv}} \Rightarrow R_{conv} = \frac{1}{hS} = \frac{1}{h \times \pi \times d \times H}$ (>0)

h s'exprime en $W \cdot K^{-1} \cdot m^{-2}$

AN : $R_{conv} = 2{,}0 \times 10^{-2}\ K \cdot W^{-1}$

3. Les résistances conductives et convectives étant en série : $R_{th} = R_{cond} + R_{conv} = 9{,}7 \times 10^{-2}\ K \cdot W^{-1}$

4. **Système** : vin dans la bouteille, étudié entre les instants t et $t + dt$

Bilan d'énergie (monobare : $\boldsymbol{P_{ext} = cste}$) : $dH = \delta Q = -\Phi dt$ avec $\Phi = \Phi_{cond} = \Phi_{conv}$ (série donc même flux)

avec : $\Phi = \frac{T - T_A}{R_{th}}$ où T est la température du système et $dH = CdT = mcdT$

$$\Longrightarrow mcdT = -\frac{T - T_A}{R_{th}} dt \Longrightarrow \frac{dT}{dt} + \frac{1}{mcR_{th}} T = \frac{1}{mcR_{th}} T_A$$

5. Solution générale de l'équation différentielle : $T(t) = k \times e^{-\frac{t}{\tau}} + T_A$ avec : $\tau = mcR_{th}$
Condition initiale : $T(t = 0) = k + T_A = T_0 \Longrightarrow k = T_0 - T_A$
Bilan : $T(t) = (T_0 - T_A) \times e^{-\frac{t}{\tau}} + T_A$

$$T(t = t_D) = T_D = (T_0 - T_A) \times e^{-\frac{t_D}{\tau}} + T_A \Rightarrow e^{-\frac{t_D}{\tau}} = \frac{T_D - T_A}{T_0 - T_A}$$

$$\Rightarrow t_D = -\tau \times ln\left(\frac{T_D - T_A}{T_0 - T_A}\right) = -\tau \times ln\left(\frac{T_D - T_A}{T_0 - T_A}\right) = mcR_{th} \times ln\left(\frac{T_D - T_A}{T_0 - T_A}\right)$$

$$= \rho \times \pi \times \left(\frac{d}{2} - e\right)^2 \times H \times R_{th} \times ln\left(\frac{T_D - T_A}{T_0 - T_A}\right)$$

$AN : t_D = 334\ s$

Exercice 3 : Epaisseur d'un igloo

Système d'étude : Système d'étude : coquille hémisphérique comprise entre r et $r+dr$ où $0 < r < R_{int}$, entre les instants t et $t+dt$
Quantité de chaleur algébrique entrante en r par conduction thermique : $\delta Q_e = \Phi(r)dt$
Quantité de chaleur algébrique sortante en r+dr par conduction thermique : $\delta Q_s = \Phi(r+dr)dt$
Bilan d'énergie en régime stationnaire : $P_{ext} = cst \Longrightarrow dH = \delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s$

En régime stationnaire : $dH = 0 \Rightarrow \delta Q_e = \delta Q_s \Rightarrow \Phi(r) = \Phi(r+dr) \Longrightarrow \boldsymbol{\Phi = P = cste}$ **: le flux se conserve et est égal au flux thermique crée par le métabolisme de l'habitant**

Loi de Fourier : $\phi_{th} = P = cst = -\lambda S\frac{dT}{dr} = -\lambda 2\pi r^2\frac{dT}{dr}$ (surface d'une hémisphère de rayon r : $2\pi r^2$)

$$\Longrightarrow \int_{T_{int}}^{T_{ext}} dT = -\frac{P}{2\pi\lambda}\int_{R_{int}}^{R_{int}+e}\frac{dr}{r^2} \Longrightarrow T_{ext} - T_{int} = -\frac{P}{2\pi\lambda}\times\left(-\frac{1}{R_{int}+e}+\frac{1}{R_{int}}\right) = -\frac{P}{2\pi\lambda}\times\frac{e}{(R_{int}+e)\times R_{int}}$$

$$\Longrightarrow (T_{ext}-T_{int})\times(R_{int}+e)\times R_{int} = -\frac{P}{2\pi\lambda}\times e \Longrightarrow (T_{ext}-T_{int})\times {R_{int}}^2 = -\left(\frac{P}{2\pi\lambda}+(T_{ext}-T_{int})\times R_{int}\right)\times e$$

$\Longrightarrow e = -\frac{(T_{ext}-T_{int})\times {R_{int}}^2}{\frac{P}{2\pi\lambda}+(T_{ext}-T_{int})\times R_{int}}$ AN : $\boldsymbol{e = 0{,}23\ m}$

Remarque : la résistance thermique d'une coquille sphérique de rayon intérieur R_1 (à la température T_1) et de rayon extérieur R_2 (à la température T_2), rempli d'un matériau de conductivité thermique λ se calcule de la même manière :
$\phi_{th} = cst = -\lambda S\frac{dT}{dr} = -\lambda 4\pi r^2\frac{dT}{dr}$ (surface d'une sphère de rayon r : $4\pi r^2$)

$$\Longrightarrow \int_{T_1}^{T_2} dT = -\frac{\phi_{th}}{4\pi\lambda}\int_{R_1}^{R_2}\frac{dr}{r^2} \Longrightarrow T_2 - T_1 = -\frac{\phi_{th}}{4\pi\lambda}\times\left(-\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_1}\right) = -\frac{\phi_{th}}{4\pi\lambda}\times\frac{R_2-R_1}{R_1R_2} \Longrightarrow \boldsymbol{R_{th} = \frac{T_1-T_2}{\phi_{th}} = \frac{1}{4\pi\lambda}\times\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}}$$

Exercice 4 : Epaisseur de la croûte d'une comète

1. La quantité de chaleur reçue pendant Δt par la surface du cœur de la comète vaut : $\phi_{com}\Delta t$
Cette énergie thermique permet la sublimation de la glace : $\phi_{com}\Delta t = n_{glace}L_{sub} = \frac{m_{glace}}{M_{glace}}L_{sub}$
Par analyse dimensionnelle : $\phi_{com} = j_{com}\times S_{com} = j_{com}\times 4\pi r_{com}^2$

On obtient donc : $j_{com}\times 4\pi r_{com}^2\times\Delta t = \frac{m_{glace}}{M_{glace}}L_{sub} \Longrightarrow \boldsymbol{m_{glace} = \frac{j_{com}\times 4\pi r_{com}^2\times\Delta t\times M_{glace}}{L_{sub}}} \Longrightarrow \boldsymbol{m_{glace} = 431\ kg}$

2. En absence de sources internes (énergie apportée ou perdue) et en régime stationnaire, le flux se conserve.

3. Loi de Fourier (symétrie sphérique) : $\Phi_{th} = -\lambda S\frac{dT}{dr} = -\lambda 4\pi\lambda r^2\frac{dT}{dr}$ avec $\Phi_{th} = -\phi_{com}$ (car ϕ_{com} est orientée de l'extérieur de la comète vers l'intérieur, tandis que Φ_{th} est orienté dans le sens des r croissants donc de l'intérieur vers l'extérieur de la comète).

On obtient : $\boldsymbol{dT = +\frac{\phi_{com}}{4\pi\lambda r^2}dr}$

4. $\int_{T_0}^{T} dT = \frac{\phi_{com}}{4\pi\lambda}\int_{r_{com}}^{r}\frac{dr}{r^2}$ ϕ_{com} étant constant

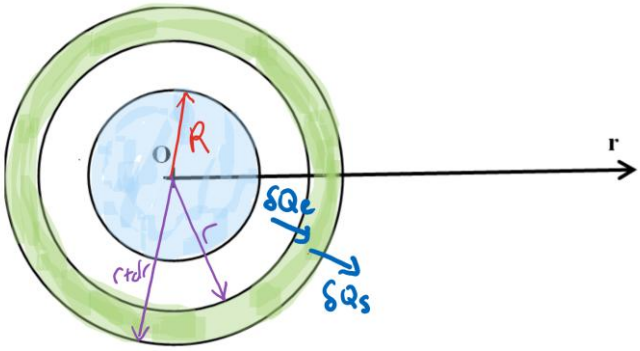
Ce qui donne : $T - T_0 = \frac{\phi_{com}}{4\pi\lambda}\times\left(-\frac{1}{r}+\frac{1}{r_{com}}\right) \Longrightarrow \boldsymbol{T = T_0 + \frac{\phi_{com}}{4\pi\lambda}\times\left(-\frac{1}{r}+\frac{1}{r_{com}}\right)}$

5. Pour $r = r_{com} - e$: $T = T_1$

On obtient donc : $T_1 = T_0 + \frac{\phi_{com}}{4\pi\lambda}\times\frac{-e}{(r_{com}-e)\times r_{com}} \approx T_0 - \frac{\phi_{com}}{4\pi\lambda}\times\frac{e}{{r_{com}}^2}$ si $e \ll r_{com}$

$$\Longrightarrow e = \frac{(T_0-T_1)\times 4\pi\lambda {r_{com}}^2}{\phi_{com}} = \frac{(T_0-T_1)\times 4\pi\lambda {r_{com}}^2}{\phi_{com}} \Longrightarrow \boldsymbol{e = \frac{(T_0-T_1)\times\lambda}{j_{com}}} \Longrightarrow \boldsymbol{e = 51\times 10^{-2} m = 51 cm}$$

Exercice 5 : Température cutanée d'un mammifère



1. $\phi = \varphi_0 \times \frac{4}{3}\pi R^3$

2. **Système d'étude :** Système d'étude : coquille sphérique comprise entre r et $r + dr$, entre les instants t et $t + dt$
   Quantité de chaleur algébrique entrante en r par conduction thermique : $\delta Q_e = \Phi(r)dt$
   Quantité de chaleur algébrique sortante en r+dr par conduction thermique : $\delta Q_s = \Phi(r + dr)dt$
   Bilan d'énergie en régime stationnaire : $P_{ext} = cst \Longrightarrow dH = \delta Q = \delta Q_e - \delta Q_s$

   En régime stationnaire : $dH = 0 \Rightarrow \delta Q_e = \delta Q_s \Rightarrow \Phi(r) = \Phi(r + dr) \Longrightarrow \boldsymbol{\Phi = cste}$ **: le flux se conserve**

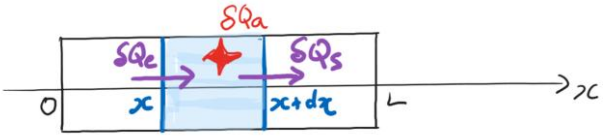
3. **Loi de Fourier :** $\phi = -\lambda S\frac{dT}{dr} = -\lambda 4\pi r^2\frac{dT}{dr} = cste = \varphi_0 \times \frac{4}{3}\pi R^3$
   $\Longrightarrow r^2\frac{dT}{dr} = -\varphi_0 \times \frac{1}{3\lambda}R^3 \Longrightarrow \int_{T(r)}^{T_0} dT = -\frac{\varphi_0 R^3}{3\lambda}\int_r^{+\infty}\frac{dr}{r^2}$
   $\Longrightarrow T_0 - T(r) = -\frac{\varphi_0 R^3}{3\lambda} \times \left[-\frac{1}{r}\right]_r^{+\infty} = -\frac{\varphi_0 R^3}{3\lambda} \times \frac{1}{r} \Longrightarrow \boldsymbol{T(r) = T_0 + \frac{\varphi_0 R^3}{3\lambda} \times \frac{1}{r}}$

4. $T(r = R) = T_C \Longrightarrow \boldsymbol{T_C = T_0 + \frac{\varphi_0 R^2}{3\lambda}}$
5. $T_C = T_0 + \frac{\varphi_0 R^2}{3\lambda} \Longrightarrow \boldsymbol{\varphi_0 = \frac{3\lambda \times (T_C - T_0)}{R^2}}$
   AN : $\varphi_{0,eau} = 2{,}4 \times 10^5\ W.m^{-3}$ $\varphi_{0,air} = 2{,}4 \times 10^3\ W.m^{-3}$

Exercice 6 : Etude d'un fusible en régime permanent

1. **a**. La puissance électrique reçue par le fil est : $P = \mathrm{R} \times \boldsymbol{I^2} = \frac{L}{\sigma S}\boldsymbol{I^2}$
   b. La puissance électrique reçue par une tranche d'épaisseur dx du fil électrique : $\boldsymbol{P_{dx} = R_{dx} \times I^2 = \frac{dx}{\sigma S}I^2}$

2. **a.** Système d'étude : tranche d'épaisseur dx, comprise entre x et $x + dx$, entre les instants t et $t + dt$



   Bilan d'énergie sur une tranche d'épaisseur dx : $P_{ext} = cst \Longrightarrow dH = \delta Q = \delta Q_e + \delta Q_a - \delta Q_s$

   En régime stationnaire : $dH = 0 \Rightarrow \delta Q_e + \delta Q_a = \delta Q_s \Longrightarrow \delta Q_e + \delta Q_a = \delta Q_s$

   où : δQ_e : quantité de chaleur entrante (algébrique) par conduction thermique
   δQ_s : quantité de chaleur sortante (algébrique) par conduction thermique
   δQ_a : quantité de chaleur apportée par effet joule

$$\Longrightarrow \Phi_{th,e}dt + \frac{dx}{\sigma S}I^2dt = \Phi_{th,s}dt \Longrightarrow \Phi_{th}(x)dt + \frac{dx}{\sigma S}I^2dt = \Phi_{th}(x + dx)dt \Longrightarrow \Phi_{th}(x) + \frac{dx}{\sigma S}I^2 = \Phi_{th}(x + dx$$
$$\Rightarrow \Phi_{th}(x + dx) - \Phi_{th}(x) = \frac{dx}{\sigma S}I^2 \Longrightarrow \frac{d\Phi_{th}}{dx}dx = \frac{dx}{\sigma S}I^2 \Longrightarrow \frac{d\Phi_{th}}{dx} = \frac{I^2}{\sigma S}$$

   Loi de Fourier : $\Phi_{th} = -\lambda\frac{dT}{dx}S \Longrightarrow \frac{d\Phi_{th}}{dx} = -\lambda S\frac{d^2T}{dx^2} = \frac{I^2}{\sigma S}$

L'équation différentielle s'écrit donc : $\boldsymbol{\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{I^2}{\lambda\sigma S^2}}$

b. $\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{I^2}{\lambda\sigma S^2} \Longrightarrow \frac{dT}{dx} = -\frac{I^2}{\lambda\sigma S^2}x + a \Longrightarrow T = -\frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}x^2 + ax + b$

Conditions aux limites : $T(x=0) = T_0 \Longrightarrow b = T_0$

$$T(x=L) = T_0 \Longrightarrow -\frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}L^2 + aL + T_0 = T_0 \Longrightarrow -\frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}L^2 + aL = 0 \Longrightarrow a = \frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}L$$

Bilan : $\boldsymbol{T = -\frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}x^2 + \frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}Lx + T_0}$

c. L'intensité maximale du fusible est atteinte lorsque la température maximale T_{max} est égale à la température de fusion du plomb.

Recherche de la température maximale T_{max} du fil :

$$\frac{dT}{dx} = 0 \Longrightarrow -\frac{I^2}{\lambda\sigma S^2}x + \frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}L = 0 \Longrightarrow x = \frac{L}{2}$$

$$\boldsymbol{T_{max}} = T\left(x = \frac{L}{2}\right) = -\frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}\left(\frac{L}{2}\right)^2 + \frac{I^2}{2\lambda\sigma S^2}L\left(\frac{L}{2}\right) + T_0 = \boldsymbol{\frac{I^2L^2}{8\lambda\sigma S^2} + T_0}$$

$$T_{max} = T_{fus} \Longrightarrow \frac{I^2L^2}{8\lambda\sigma S^2} + T_0 = T_{fus} \Longrightarrow \frac{I^2L^2}{8\lambda\sigma S^2} = T_{fus} - T_0 \Longrightarrow S^2 = \frac{I^2L^2}{8\lambda\sigma \times (T_{fus} - T_0)} \Longrightarrow S = \left(\frac{I^2L^2}{8\lambda\sigma \times (T_{fus} - T_0)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Or : $S = \pi a^2$

Donc : $\pi a^2 = \frac{IL}{\sqrt{8\lambda\sigma \times (T_{fus} - T_0)}} \Longrightarrow \boldsymbol{a = \frac{(IL)^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}\left(8\lambda\sigma \times (T_{fus} - T_0)\right)^{\frac{1}{4}}}}$ AN : $\boldsymbol{a = 9{,}2 \times 10^{-4} m = 0{,}92\ m}$

Exercice 7 : Chauffage d'une baguette de pain au micro-onde

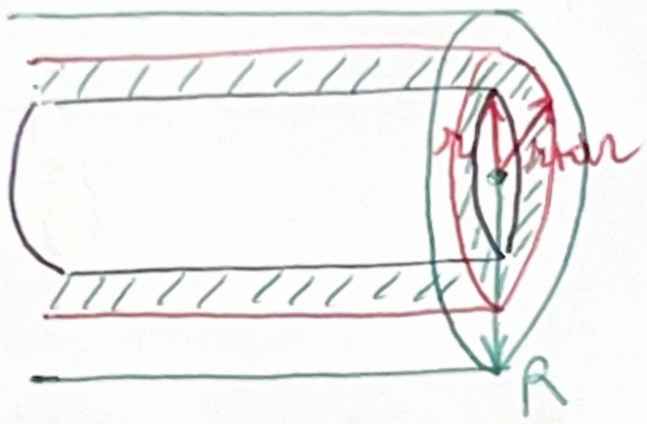
Une baguette de pain (conductivité thermique $\lambda = 0{,}5\ SI$) modélisée par un cylindre de longueur $L = 20\ cm$ et de rayon $R = 5\ cm$, est placée dans un four à micro-onde. On se place dans l'hypothèse du régime stationnaire. Le four a une puissance $P = 800\ W$ et la température extérieure est $T_{ext} = 300\ K$. La baguette reçoit 60% de la puissance P.

- (**) Calculer la puissance volumique reçue en un point de la baguette.
- (***) Déterminer la loi $T(r)$ et estimer la température au centre de la baguette.

Application 2 = Chauffage d'une baguette de pain au four micro-onde.

(1) $$\rho = \frac{0{,}60 \times P}{V_{pain}} = \frac{0{,}60\, P}{\pi R^2 \times \ell} \Rightarrow \underline{\rho = 306\ kW m^{-3}}.$$

(2)



- Système élémentaire = calotte cylindrique comprise entre le cylindre de rayon r et celui de rayon $r+dr$ de volume $dV = 2\pi r \ell\, dr$ (pareil avec sphère)

- 1er principe entre t et $t+dt$ en RS

$$\Theta = dH = \phi(r)\,dt - \phi(r+dr)\,dt + p\,dV\,dt$$

(RS ↑, isobare ↑)

$$-d\phi\,dt + p \times 2\pi r \ell\, dr\, dt = 0$$

$$d\phi = 2\pi r \ell\, dr\, p$$

- $p = cte \Rightarrow$ on intègre directement $d\phi$: $\phi = p\pi\ell r^2 + A$

- Loi de Fourier : $\phi = -\lambda S \frac{dT}{dr} = -\lambda \times 2\pi r \ell \times \frac{dT}{dr}$

$$-\lambda\, 2\pi r \ell\, \frac{dT}{dr} = p\pi\ell r^2 + A$$

$$\frac{dT}{dr} = \frac{p\pi\ell r^2}{-\lambda 2\pi r \ell} + \frac{A}{-\lambda 2\pi r \ell} \quad (\to B)$$

- Loi $T(r)$: $dT = -\frac{p}{2\lambda} r\, dr - \frac{B}{r} \Rightarrow T = -\frac{p}{\lambda} r^2 - B \ln r + C$

$T(R) > T_e$?

→ Non divergence en $r = 0 \Rightarrow B = 0$

→ $T(R) = T_e \Rightarrow T_e = -\frac{p}{\lambda} R^2 + C \Rightarrow C = T_e + \frac{p}{\lambda} R^2$

$$\boxed{T = \frac{p}{\lambda}\left(R^2 - r^2\right) + T_e}$$

$$T(0) = \frac{pR^2}{\lambda} + T_e$$

AN : $\underline{T(0) = 682\ K}$