Suites arithmétiques - Suites géométriques - Suites arithmético-géométriques - Suites vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2

Suites arithmétiques

Définition : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique signifie qu'il existe un réel r tel que : Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n + r$. Le réel r est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Propriétés :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n_0} + (n - n_0)r$.
2. Soit $p \leq n$, $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k = ...$
3. Toute suite arithmétique de raison non nulle diverge, et admet pour limite $+\infty$ ou $-\infty$.

Suites géométriques

Définition : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique signifie qu'il existe un réel q tel que : Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n$. Le réel q est appelé la raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Propriétés :

1. $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \times q^n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_{n_0} \times q^{n-n_0}$.
2. Soit $p \leq n$, $\sum\limits_{k=p}^{n} u_k =$
3. • Si $|q| < 1$, alors la suite converge vers zéro.
   • Si $q = 1$ et $u_0 \neq 0$, alors la suite converge vers un.
   • Si $|q| \geq 1$, $q \neq 1$ et $u_0 \neq 0$, alors la suite diverge.

Remarque : On peut généraliser ces résultats avec une raison q égale à un nombre complexe.

Suites arithmético-géométiques

Définition : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmético-géométrique signifie qu'il existe deux réels r et q tels que : Pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = q \times u_n + r$.

Propriétés : • Si $q = 1$ ou $r = 0$, on retrouve une suite arithmétique ou une suite géométrique de raison q.
• Si $q \neq 1$ et $r \neq 0$, on peut exprimer le terme u_n en fonction de n :
Soit a le réel tel que $a = q + r$, alors la suite $(u_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison q. D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (u_0 - a) \times q^n + a$. (résultat à ne pas retenir par coeur, mais démarche oui !)

Suites vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2

Définition : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2 signifie qu'il existe deux réels a et b tels que : Pour tout entier naturel n, $u_{n+2} + au_{n+1} + bu_n = 0$.

Remarque : La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est a priori soit une suite réelle, soit une suite complexe. On détaille ici uniquement le cas d'une suite réelle.

Propriétés : On résout l'équation caractéristique associée : $r^2 + ar + b = 0$, d'inconnue r,$r \in \mathbb{C}$.

— Si $a^2 - 4b > 0$, alors l'équation caractéristique admet deux solutions réelles distinctes r_1 et r_2.
D'où, il existe deux réels A et B tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = A(r_1)^n + B(r_2)^n$.

— Si $a^2 - 4b = 0$, alors l'équation caractéristique admet une unique solution réelle r_0.
D'où, il existe deux réels A et B tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = (A + Bn)(r_0)^n$.

— Si $a^2 - 4b < 0$, alors l'équation caractéristique admet deux solutions complexes non réelles et conjuguées r_1 et r_2 telles que $r_1 = me^{i\theta}$, avec m un réel,$m > 0$ et $\theta \in]0,\pi[$.
D'où, il existe deux réels A et B tels que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = Am^n \cos(n\theta) + Bm^n \sin(n\theta)$.

Exercice 1 : On considère la suite $(u_n)_n$ vérifiant $u_0 = 0, u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.
Déterminer u_n en fonction de n. Montrer que la suite $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ converge, donner la valeur de sa limite.

Exercice 2 : On considère une suite $(v_n)_n$ vérifiant $v_0 = 1, v_1 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+2} = \sqrt{v_{n+1}v_n}$. Justifier que la suite est bien définie. Est-elle convergente ? Vous pourrez travailler avec $\ln(v_n)$.

Exercice 3 : On considère la suite $(u_n)_n$ vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} - 4u_{n+1} - 4u_n = 2^n$.

Trouver le réel k tel que la suite $(w_n)_n$ définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \dfrac{u_n}{2^n} - k$ soit une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2. En déduire u_n en fonction de n.