Equation de diffusion de de la chaleur en dimension 1

L'objectif de ce problème est de résoudre dans diverses situations l'équation de diffusion de la chaleur en dimension 1.

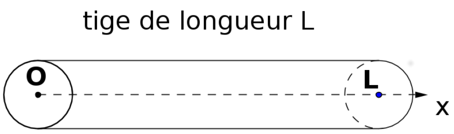

Figure 1

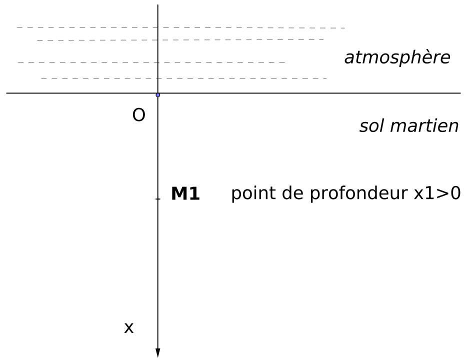

Figure 2

Nous allons tout d'abord considérer une tige homogène de longueur L suffisamment mince de façon à ce que les paramètres caractéristiques (flux de chaleur, température) ne dépendent que de la coordonnée x. La surface de la tige est thermiquement isolée. Il n'y a donc aucune perte de chaleur à travers la surface de la tige. (cf. Fig. 1)
Notons $u(x,t)$ la température dans la tige au temps t au point d'abscisse x, alors la fonction u satisfait l'équation de diffusion de la chaleur

$$(1)\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

où c est une constante dépendant de paramètres caractéristiques de la tige.

Puis dans un second temps, nous allons nous intéresser à l'inertie thermique à la surface de la planète Mars. On modélise le sol martien comme un milieu homogène, isotrope, de conductivité thermique k, de masse volumique ρ et de capacité thermique massique à pression constante C_p. La température dans le sol est supposée ne dépendre que du temps et de la profondeur x. L'axe Ox est dirigé vers le bas, le niveau du sol correspondant à la surface $x = 0$. On étudie une surface de la planète suffisamment petite pour l'assimiler à un plan, et négliger la courbure du sol. (cf. Fig. 2)
En notant $u(x,t)$ la température dans le sol au temps t au point de profondeur x, alors la fonction u satisfait l'équation de diffusion de la chaleur

$$(1)\frac{\partial u}{\partial t} = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

où c est une constante dépendant de k, ρ, C_p.

Dans ces 2 situations, la fonction u satisfait la même équation différentielle. En revanche, ce que l'on appelle d'une part les conditions à la frontière et d'autre part les conditions initiales vont être différentes.

Les conditions à la frontière, ou encore parfois appelées conditions aux bords ou conditions aux limites, sont des conditions sur les valeurs de la fonction u pour des x correspondant à la frontière spatiale du modèle. Les connaître revient ainsi :
• Dans la situation 1, à connaître $u(0,t)$ et $u(L,t)$ pour tout $t > 0$.
• Dans la situation 2, à connaître $u(0,t)$ pour tout $t > 0$.

Les conditions initiales sont, elles, des conditions portant sur la valeur de la fonction u pour $t = 0$. Les connaître revient à connaître $u(x,0)$ pour tout x. On notera : pour tout x, $u(x,0) = f(x)$ avec f une fonction de classe C^2.

On admet le résultat suivant : L'équation (1) avec des conditions à la frontière de type (2) ou (7) (se référer aux parties 1 et 3), et des conditions initiales avec f une fonction de classe C^2 admet au plus une solution. C'est-à-dire que s'il existe une solution, alors elle est unique.

Partie 1 : Cas de la tige de longueur L

Nous supposons que les extrémités de la tige sont maintenues dans de la glace. ce qui se traduit de la manière suivante : La fonction u est solution de l'équation

$$(1) \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

avec comme conditions à la frontière : (2) $u(0,t) = 0$ et $u(L,t) = 0$ pour tout $t \geq 0$.

1. Recherche de solutions sous la forme $u(x,t) = X(x)T(t)$: Dans cette question, on suppose qu'il existe deux fonctions $X : x \mapsto X(x)$ et $T : t \mapsto T(t)$ différentes de la fonction nulle, X fonction de classe C^2 sur $[0,L]$, T fonction de classe C^2 sur $[0, +\infty[$, telles que pour tout x de $[0, L]$ et pour tout $t \geq 0$, la fonction $u : (x,t) \mapsto u(x,t) = X(x)T(t)$ est solution de l'équation (1) avec les conditions à la frontière (2).

   On suppose de plus que la fonction u ne s'annule par sur $]0, L[\times]0, +\infty[$.

   (a) Montrer que pour tout (x,t) de $]0, L[\times]0, +\infty[$, $\dfrac{X''(x)}{X(x)} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{T'(t)}{T(t)}$.

   (b) Justifier qu'il existe une constante λ réelle, telle que (3) et (4) sont vérifiées :

   $$\begin{array}{ll} (3) & \text{pour tout } x \text{ de }]0, L[, X''(x) - \lambda X(x) = 0 \\ (4) & \text{pour tout } t \text{ de }]0, +\infty[, T'(t) - \lambda c^2 T(t) = 0 \end{array}$$

   (c) Résoudre l'équation (4), donner l'ensemble des fonctions solutions de cette équation.

   (d) Résoudre l'équation (3), donner l'ensemble des fonctions solutions de cette équation, en distinguant les 3 cas $\lambda = 0, \lambda > 0, \lambda < 0$.

   (e) En considérant les conditions aux frontières, justifier que $\lambda < 0$, et qu'il existe un entier k tel que $\lambda = \dfrac{-k^2\pi^2}{L^2}$.

   (f) Récapituler ce qui a été démontré, et donner une expression de la fonction u.

2. Soit k_0 un entier naturel, soit C un réel fixé, et la fonction u définie par :

   Pour tout (x,t) de $[0, L] \times [0, +\infty[$, $u(x,t) = Ce^{-\left(\frac{k_0\pi c}{L}\right)^2 t} sin\left(\frac{k_0\pi}{L}x\right)$.

   (a) Vérifier que u est solution de l'équation (1) avec les conditions à la frontière (2).

   (b) Préciser les conditions initiales vérifiées par la fonction u.

   (c) Donner pour un réel x fixé, $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$.
   Quelle interprétation en faites-vous ?

3. Conditions initiales imposées : Soit N un entier naturel, soit des réels $\alpha_0, \alpha_1, ...\alpha_N$

   On définit des conditions initiales : (5) Pour tout x de $[0, L], u(x, 0) = \sum\limits_{n=0}^{N} \alpha_n sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$

   (a) Montrer que si u_1 et u_2 sont deux fonctions solutions de l'équation (1), alors pour tous réels λ et μ, la fonction $\lambda u_1 + \mu u_2$ est aussi solution de l'équation (1).

   (b) Montrer que l'équation (1) avec les conditions à la frontière (2) et les conditions initiales (5) admet une solution unique. En donner une expression en fonction de N, des réels $(\alpha_n)_n$, de c et de L.

   (c) Donner pour un réel x fixé, $\lim\limits_{t \to +\infty} u(x,t)$.

   (d) On dit que la diffusion "lisse" les conditions initiales, et lisse plus vite les hautes fréquences. Expliquer brièvement pourquoi cette affirmation est illustrée par le résultat précédent.

Partie 2 : Algorithmique Dans cette partie, $L = \pi$.
Soit N un entier naturel, soit des réels $\alpha_0, \alpha_1, ...\alpha_N$. On note A la liste des réels α_i, pour i de 0 à N.

Pour tout x de $[0, L]$, on note $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{N} \alpha_n sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$.

1. Ecrire une fonction python **valeur_ f** prenant en entrée la liste A et un réel x de $[0, L]$, et donnant en sortie la valeur de $f(x)$.
2. On définit les réels x_k de la manière suivante : $x_0 = 0$ et pour tout k de 0 à 999, $x_{k+1} = x_k + \dfrac{L}{1000}$.
   Ecrire une fonction python **listeX** donnant en sortie la liste des réels x_k pour k de 0 à 1000.
3. Ecrire une fonction python traçant une ligne brisée de segments, qui sera proche du graphe de la fonction f. Pour tout k de 0 à 999, le $(k+1)-ième$ segment joint le point de coordonnées $(x_k, f(x_k))$ au point de coordonnées $(x_{k+1}, f(x_{k+1}))$. On pourra utiliser la fonction **plot**.
4. Voici la fonction **algo** écrite ci-dessous :

```
def algo(Y):
    m=0
    c=0
    for i in range(len(Y)-1):
        if Y[i]<=Y[i+1]:
            c+=1
        else:
            if c>m:
                m=c
            c=0
    return m
```

   Pour les différentes listes Y suivantes, choisir la valeur de **algo**(Y) parmi les 3 proposées. Expliquer votre choix avec une phrase.

   (a) $Y = [\,]$

algo$(Y) =$	error	False	0

   (b) $Y = [0, 1, 2, -1, 4, 5, 0]$

algo$(Y) =$	2	3	4

   (c) $Y = [0, -1, 1, -3, -2, -1, 0]$

algo$(Y) =$	1	2	3

5. Ecrire en une (ou plusieurs) fonction(s) un programme prenant en entrée une liste Y de longueur supérieure ou égale à 2, de nombres distincts deux à deux et donnant en sortie les indices des deux plus grands éléments de la liste Y.

Partie 3, partie facultative : Inertie thermique du sol de la planète Mars

On rappelle, que la fonction u égale à la température dans le sol satisfait à l'équation de diffusion de la chaleur, l'équation notée (1).

La température de surface varie périodiquement, que ce soit en raison des fluctuations journalières ou annuelles de l'ensoleillement. En première approximation, on suppose que : (7) pour tout t, $u(0, t) = u_0 + \theta_0 \cos(\omega t)$ avec ω la pulsation de la fluctuation considérée, $\omega > 0$. On définit ainsi les conditions à la frontière vérifiées par la température, c'est-à-dire la fonction u.

De plus, en profondeur, on suppose que u sera du type : $u(x, t) = u_0 + \theta(x)\cos(\omega t + \beta x)$. C'est-à-dire qu'il existe β un réel non nul et θ une fonction de classe C^2 non identiquement nulle tels que la relation ci-dessus soit vérifiée.

1. Cette question a pour objectif de démontrer la propriété suivante : Soient a et b deux fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$ telle que : pour tout x réel positif et pour tout t réel, $a(x)\sin(\omega t + \beta x) + b(x)\cos(\omega t + \beta x) = 0$, alors les fonctions a et b sont égales à la fonction nulle.
   Soit E l'espace vectoriel égal à l'ensemble des fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit x un réel fixé.
   Montrer que les 2 fonctions $h_1 : t \mapsto \sin(\omega t + \beta x)$ et $h_2 : t \mapsto \cos(\omega t + \beta x)$ forment une famille libre.
   Conclure.
2. Montrer que la fonction θ est à la fois solution d'une équation différentielle linéaire du 1er ordre et solution d'une équation différentielle linéaire du 2nd ordre à coefficients constants.
3. En déduire que $\theta : x \mapsto Ae^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}\frac{x}{c}}$, avec A une constante.
4. Que peut-on en déduire sur l'évolution de la température dans le sol de la planète ?