Etude de deux suites implicites

Dans ce problème, on s'intéresse à l'équation suivante :

$$(E_n) : \quad \frac{\ln^2(x)}{x} = \frac{1}{n},$$

où n est un entier strictement positif, et x, l'inconnue, est un nombre réel strictement positif. Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par :

$$\forall x \in [1;+\infty[, f(x) = \frac{\ln^2(x)}{x}.$$

1. (a) Dresser le tableau de variations de f sur son ensemble de définition.
   (b) En déduire que l'équation (E_1) n'admet pas de solution.
   (c) Démontrer que, pour $n \geq 2$, l'équation (E_n) admet deux solutions, que l'on notera α_n et β_n, telles que :
   $$1 \leq \alpha_n \leq e^2 \leq \beta_n.$$
2. Ecrire une fonction Python qui permet de représenter sur un même graphe la courbe représentative de f ainsi que les droites D_i, $1 \leq i \leq 6$, où D_i a pour équation $y = \dfrac{1}{i}$, pour $i \in [\![1, 6]\!]$.
3. Quelle conjecture peut-on émettre sur le sens de variations et sur les limites des suites $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ et $(\beta_n)_{n\geq 2}$?
4. Dans cette question, on va étudier la suite $(\beta_n)_{n\geq 2}$.
   (a) Démontrer que la suite $(\beta_n)_{n\geq 2}$ est strictement monotone.
   (b) Montrer que la suite $(\beta_n)_{n\geq 2}$ admet une limite que l'on précisera.
   (c) Soit la suite $(u_n)_{n\geq 2}$ définie par $u_n = \dfrac{\beta_n}{n}$. On admet que $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{=} o(\ln(n))$. Prouver alors que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln^2(n)$.
   (d) En déduire un équivalent de $(\beta_n)_{n\geq 2}$.
5. On s'intéresse dans cette question à la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$
   (a) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 2}$ admet une limite que l'on précisera.
   (b) Donner un équivalent de $\alpha_n - 1$ lorsque n tend vers $+\infty$. Comment pourrait-on vérifier ce résultat avec l'outil informatique ?