| Fiche d'exercices n°1 : Suites réelles - Fonctions numériques | 3 septembre 2024 |
|---|---|

**Exercice 1 :** QCM, il peut y avoir plusieurs réponses exactes.

| | | |
|---|---|---|
| Soit $L$ un réel , $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = L$ signifie : | (a) | Il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout entier naturel $n$, $\lvert u_n - L\rvert \leq \varepsilon$ |
| | (b) | Il existe un entier naturel $n_0$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$ : pour tout entier naturel $n$, si $n \geq n_0$ alors $\lvert u_n - L\rvert \leq \varepsilon$ |
| | (c) | Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel $n_0$ tel que : pour tout entier naturel $n$, si $n \geq n_0$ alors $\lvert u_n - L\rvert \leq \varepsilon$ |
| | (d) | Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier naturel $n_0$ tel que : pour tout entier naturel $n$, si $n \geq n_0$ alors $L - \varepsilon \leq u_n \leq L + \varepsilon$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ signifie : | (a) | Il existe un réel $M$ tel que pour tout entier naturel $n, u_n \geq M$ |
| | (b) | Il existe un entier naturel $n_0$ tel que pour tout réel $M$ : pour tout entier naturel $n$, si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq M$ |
| | (c) | Pour tout réel $M$, il existe un entier naturel $n_0$ tel que : $u_{n_0} \geq M$ |
| | (d) | Pour tout réel $M$, il existe un entier naturel $n_0$ tel que : pour tout entier naturel $n$, si $n \geq n_0$ alors $u_n \geq M$ |

| | | |
|---|---|---|
| $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n =$ | (a) | n'existe pas |
| | (b) | 1 |
| | (c) | $+\infty$ |
| | (d) | e |

**Exercice 2 :** Manipulation de epsilon...

1. Soit $(u_n)_n$ une suite convergeant vers le réel $L$, avec $L > 0$.
   Montrer que $(u_n)_n$ est strictement positive à partir d'un certain rang.
2. Montrer que toute suite convergente est bornée. La réciproque est-elle vraie ?

**Exercice 3 :** Vrai-Faux

1. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 3$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.
2. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.
3. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n - 3| = 0$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 3$.
4. Si $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$
5. Toute suite $(u_n)_n$ décroissante, à termes positifs converge vers 0.
6. Toute suite $(u_n)_n$ non majorée tend vers $+\infty$, lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
7. Toute suite $(u_n)_n$ croissante admet une limite lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
8. Toute suite $(u_n)_n$ qui tend vers $+\infty$, lorsque $n$ tend vers $+\infty$ est croissante à partir d'un certain rang.
9. Soit $K \in [0,1[$, soit une suite $(u_n)_n$ à termes positifs telle que : pour tout $n$, $u_{n+1} \leq K u_n$. Alors la suite $(u_n)_n$ converge et a pour limite 0.
10. Si pour tout $n > 0$, $u_n = \dfrac{1}{n^2} \arctan(n^2)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
11. Si pour tout $n > 0$, $u_n = n^2 \arctan\left(\frac{1}{n^2}\right)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
12. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} v_n$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0, v_n > 0$, alors $\ln(u_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(v_n)$.
13. Si $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n) \leq u_n \leq u_{n+1}$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

**Exercice 4 :** Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par : $\forall n \geq 1$, $u_n = -\sqrt{n} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ .

Etudier la monotonie de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$. Puis à l'aide d'un encadrement de $u_{2n} - u_n$, étudier sa convergence.

**Exercice 5 :**

Déterminer le nombre de solutions des équations suivantes d'inconnue le réel $x$ :

1. $\arctan x = x$.
2. $\arctan x = 1$.
3. Pour tout entier naturel $n$, $x^n + 1 - nx = 0$, d'inconnue $x$ dans $\mathbb{R}^+$.
4. $f(x) = x$ avec $f(x) = 1 + \dfrac{1}{2} \sin x$ d'inconnue $x$ dans $[1, +\infty[$.

**Exercice 6 :** On reprend dans cet exercice la fonction $f$ de la question 4. de l'exercice précédent.

1. Montrer que pour tout $x \geq 1$, $\dfrac{1}{2} < f(x) < \dfrac{3}{2}$ et $f(f(x)) > 1$.
2. Montrer que pour tous réels $x, y$ de $[1, +\infty[$, $|f(x) - f(y)| \leq \dfrac{1}{2}|x - y|$.
3. Justifier qu'il existe un unique réel $\ell > 1$ tel que $f(\ell) = \ell$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N})}$ définie pour tout $n$ de $\mathbb{N}$ par $u_{n+1} = f(u_n)$ et $u_0 = a$ avec $a \neq 0$ existe et vérifie pour tout $n > 2$, $u_n > 1$.

5. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge et est de limite $\ell$.
6. Question subsidiaire : évaluer la vitesse de convergence de la suite $(u_n)_n$.

**Exercice 7 :** Pour tout entier naturel $n$, on définit la fonction $f_n$ sur $]0,+\infty[$ par : pour tout réel $x > 0$, $f_n(x) = x\ln(x) - x - n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, étudier le sens de variation de la fonction $f_n$ et les branches infinies de sa courbe représentative.
2. Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0,+\infty[$. On la note $u_n$. Déterminer $u_0$.
3. Montrer que pour tout $n$ de $\mathbb{N}$, $f_n(u_{n+1}) = 1$. En déduire le sens de variation de la suite $(u_n)_n$.
4. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer : Pour tout $x$ de $[1,+\infty[$, $\ln x \leq x - 1$.
5. En déduire le signe de $f_n(\sqrt{n})$, puis la limite de la suite $(u_n)_n$.
6. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n}$.

**Exercice 8 :** On définit la fonction $f : x \mapsto f(x) = \ln(1+2x)$.

1. Déterminer le domaine de définition de $f$, puis montrer que $f$ admet exactement 2 points fixes $\alpha_1 < \alpha_2$.
2. Proposer une méthode numérique (ou plusieurs) pour obtenir une valeur approchée du point fixe $\alpha_2$. Ecrire un programme Python associé.
3. Justifier que $1 < \alpha_2 < 2$.
4. Montrer : $\forall x \in ]\alpha_2,+\infty[, 0 \leq f'(x) \leq \dfrac{2}{3}$.

On considère une suite $(v_n)_n$ définie pour $\forall n \in \mathbb{N}$, par $v_{n+1} = \ln(1+2v_n)$ et $v_0 \in \mathbb{R}$.

5. Proposer des conjectures sur la définition et la convergence de cette suite suivant les valeurs de $v_0$. On pourra utiliser une représentation graphique adaptée.
6. On se place dans le cas où $v_0 = 2$.
   (a) Démontrer que la suite $(v_n)_n$ est définie et que pour tout $n$, $\alpha_2 \leq v_n$.
   (b) Démontrer que la suite $(v_n)_n$ converge et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \alpha_2$.
   (c) Justifier : $\forall n \in \mathbb{N}\ |v_{n+1} - \alpha_2| \leq \dfrac{2}{3}|v_n - \alpha_2|$.
   (d) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}\ |v_n - \alpha_2| \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
   (e) Déterminer une nouvelle méthode pour déterminer une valeur approchée de $\alpha_2$ à $10^{-3}$ près.
   (f) Que dire des vitesses de convergence des différentes méthodes pour approcher $\alpha_2$ ?

**Exercice 9 :** on considère les deux suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ définies pour $\forall n \geq 0$, par $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{3u_n + v_n}{4} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 3v_n}{4} \end{cases}$ et $u_0 = 0, v_0 = 2$.
Démontrer que les suites $(u_n)_{n\geq 0}$ et $(v_n)_{n\geq 0}$ sont adjacentes.

**Exercice 10 :** Études de fonctions

1. Les fonctions tan et arctan.
   (a) Soient $a, b$ des réels tels que $a, b, a+b$ appartiennent au domaine de définition de tan.

   Exprimer $\tan(a+b)$ en fonction de $\tan a$ et $\tan b$.

   (b) Calculer $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right)$.

   (c) Résoudre dans $\mathbb{R}$, l'équation : $\arctan(2x) + \arctan(x) = \dfrac{\pi}{4}$.

2. Soit $g : x \mapsto \ln\left(e^x + 2e^{-x}\right)$ sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer les variations de $g$, les limites de $g$ en $+\infty$ et en $-\infty$, un équivalent simple de $g$ au voisinage de $+\infty$.
   Etudier les branches infinies de $g$, c'est-à-dire effectuer la recherche de droites asymptotes à la courbe de $g$.

3. On considère $f \mapsto f(x) = \arctan\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.
   (a) Déterminer le domaine de définition de $f$. Justifier que $f$ est dérivable sur ]-1,1[. Calculer $f'(x)$.
   (b) Soit et $g \mapsto g(x) = \cos x$ définie sur l'intervalle $I = [0, \pi]$. Justifier que la fonction $g$ est une bijection de $I$ sur un intervalle $J$ à préciser.
   (c) Rappeler le théorème de la dérivabilité d'une fonction réciproque. Donner le domaine de dérivabilité de $g^{-1}$.
   (d) Soit $x$ de $J$, on note $y = g^{-1}(x)$. Donner une expression de $(g^{-1})'(x)$ en fonction de $\sin y$, puis en fonction de $x$.
   (e) En déduire pour tout réel $x$ de ]-1,1[, une expression de $g^{-1}(x)$ en fonction de $f(x)$.

**Exercice 11 :** Vrai-Faux
(a) L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
(b) L'image d'un intervalle ouvert par une fonction continue est un interv. ouvert.
(c) L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
(d) Soit $f$ une fonction continue sur $[a, b]$, alors $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$ ou $[f(b), f(a)]$.