Fiche d'exercices n°2 : Les séries réelles 12 septembre 2024

Exercice 1 : Déterminer la nature des séries de terme général u_n :

a- $u_n = -e^n$ **b-** $u_n = \dfrac{2^n}{n^2}$ **c-** $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ **d-** $u_n = e^{-n}$ **e-** $u_n = \dfrac{1}{n^4}$ **f-** $u_n = \dfrac{n}{2^n}$ **g-** $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$

h- $u_n = \dfrac{5\sin n - 2\cos n}{3^n}$ **i-**$u_n = \dfrac{5n^4 - 1}{n^7 + 3n^5 + 2}$ **j-** $u_n = \dfrac{n+1}{n!}$

Questions subsidiaires : Calculs de $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$ pour les séries du **g-**, **j-**.

Exercice 2 : Pour tout $n \geq 2$, on note $u_n = \arctan\left(\dfrac{2}{n^2}\right)$.

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. On admet la propriété (*) : pour $n \geq 1$, $\arctan(n+1) - \arctan(n-1) = \arctan\left(\dfrac{2}{n^2}\right)$.

   En déduire la valeur de la somme $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} u_n$.
3. Soit $f : x \mapsto \arctan(x+1) - \arctan(x-1)$ et $g : x \mapsto \arctan\left(\dfrac{2}{x^2}\right)$.

   Justifier que f et g sont dérivables sur leurs domaines de définition, et calculer leurs dérivées.
   En déduire la propriété (*).

Exercice 3 : Soit $f : x \mapsto \ln(\ln x))$.
(1) Préciser le domaine de définition de f.
(2) Soit p un entier naturel, $p \geq 2$.
En utilisant le théorème des accroissements finis, comparer $\ln(\ln(p+1)) - \ln(\ln p))$ et $\frac{1}{p \ln p}$.
(3) En déduire la nature de la série $\sum\limits_{p \geq 2} \frac{1}{p \ln p}$.

Exercice 4 : retour sur la série harmonique : On note pour $n \geq 1$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

(a) Justifier que pour tout $k \geq 2$, $\int\limits_{k}^{k+1} \frac{1}{t} dt \leq \dfrac{1}{k} \leq \int\limits_{k-1}^{k} \frac{1}{t} dt$. Faire une interprétation graphique de ces inégalités.

(b) Pour $n \geq 2$, encadrer S_n et en déduire un équivalent simplde de S_n pour n au voisinage de $+\infty$.

Exercice 5 : soit q un réel de]0,1[, après avoir justifié que les séries convergent, calculer les sommes suivantes :

$A = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^{n-1}$ $B = \sum\limits_{n=2}^{+\infty} q^n$ $C = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nq^{n+1}$ $D = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nq^{n-2}$ $E = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n(n+1)q^n$ $F = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} n^2 q^n$

Réponses mélangées : $\dfrac{1}{q(1-q)^2}$, $\dfrac{q^2}{1-q}$, $\dfrac{q(1+q)}{(1-q)^3}$, $\dfrac{q^2}{(1-q)^2}$, $\dfrac{1}{1-q}$, $\dfrac{2q}{(1-q)^3}$

Exercice 6 : étude de la nature de la série $\sum\limits_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, avec α un réel strictement positif.

1. Etudier les cas où $0 < \alpha \leq 1$ et $\alpha \geq 2$.
2. Cas où $1 < \alpha < 2$:
   (a) Pour tout entier naturel $k \geq 2$, on note $v_k = \int\limits_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha} dt$. Montrer que $\dfrac{1}{k^\alpha} \leq v_k$.
   (b) Donner une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$. Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha}$. Conclure.

Exercice supplémentaire 7 : soient $\sum\limits_{n \geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n \geq 0} v_n$ deux séries absolument convergentes.
En comparant $|(u_n)^2|$ et $|u_n|$, puis $|u_n v_n|$ et $|u_n|$, démontrer que les séries $\sum\limits_{n \geq 0} (u_n)^2$ et $\sum\limits_{n \geq 0} u_n v_n$ convergent.
En déduire que pour tout réel λ, la série $\sum\limits_{n \geq 0} (\lambda u_n + v_n)^2$ converge.