Fiche d'exercices n°3 : Probabilité - septembre 2024

Exercice 1 : soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Dans chaque question, de (a) à (j), on considère deux événements. Les comparer entre eux, et comparer leur probabilité.
Soient A, B deux événements de $\mathcal{A}$, et soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements de $\mathcal{A}$.
(a) $A \cap B$ et A (b) $A \cup B$ et A (c) $\overline{A} \cap \overline{B}$ et $\overline{A \cup B}$ (d) $\overline{A} \cup \overline{B}$ et $\overline{A \cap B}$
(e) On suppose que $A \subset B$: $A \cap B$ et A (f) On suppose que $A \subset B$: $A \cup B$ et A
Soit $n \in \mathbb{N}^*$: (g) $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ et $\bigcap\limits_{k=1}^{n+1} A_k$ (h) $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ et $\bigcup\limits_{k=1}^{n+1} A_k$ (i) $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ et $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ (j) $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ et $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$

Exercice 2 : On considère deux sacs S_1 et S_2. Le sac S_1 contient 6 jetons blancs et 5 jetons noirs, et S_2 contient 4 jetons blancs et 8 jetons noirs.

1. Expérience 1 : on choisit avec équiprobabilité un sac parmi les deux. Puis on effectue le tirage d'un jeton dans le sac. On note B l'événement "le jeton tiré est blanc". Déterminer la probabilité de B.
2. Expérience 2 : on choisit avec équiprobabilité un sac parmi les deux. Puis on effectue le tirage simultané de deux jetons dans le sac. On note C = "les deux jetons tirés sont blanc". Déterminer la probabilité de C.
3. Expérience 3 : on effectue le tirage simultané de deux jetons dans le sac S_2 et on les transfère dans le sac S_1. Puis on effectue le tirage d'un jeton dans le sac S_1.
   On définit D="Le jeton tiré dans le sac S_1 est blanc". Déterminer la probabilité de D.

Exercice 3 : on dispose de n urnes $(n \geq 2)$ numérotées de 1 à n. Pour tout i de 1 à n, l'urne i contient i boules numérotées de 1 à i. On choisit une urne au hasard et on y pioche une boule.
Montrer que la probabilité d'obtenir une boule portant le numéro $n-1$ est $\dfrac{2n-1}{n^2(n-1)}$.
Puis déterminer pour tout k de 1 à n, la probabilité d'obtenir une boule numérotée k.

Exercice 4 : on considère une pièce équilibrée. On lance cette pièce jusqu'à obtenir "pile". On note le nombre de lancers effectués n. Puis on pioche une boule dans une urne contenant 2^n boules, dont n blanches. Les boules sont indiscernables au toucher. Déterminer la probabilité d'obtenir une boule blanche.

Exercice 5 : on considère deux sacs A et B, contenant des jetons de couleur noire ou blanche. La probabilité de piocher un jeton noir dans le sac A (respectivement dans le sac B) est α(respectivement β).
On considère $0 < \alpha + \beta < 2$.
On choisit un sac au hasard, on pioche un jeton et on observe si il est noir ou blanc, puis on le remet dans le sac. On continue les choix de sac, et les pioches selon le protocole suivant : si à la $k$ième étape on obtient un jeton noir, on garde le même sac pour l'étape $k+1$, en revanche si à la $k$ième étape on obtient un jeton blanc, on change de sac pour l'étape $k+1$.
On note a_k la probabilité d'effectuer la pioche k dans le sac A.
Déterminer a_{k+1} en fonction de a_k, puis a_k en fonction de k, α, β.

Exercice 6 : On dispose d'une urne et d'un dé équilibré. Au départ l'urne contient une boule blanche. On lance le dé. S'il donne 6, on tire une boule de l'urne et le jeu s'arrête, sinon on ajoute une boule noire dans l'urne et on passe au lancer suivant. S'il donne 6, on tire une boule de l'urne et le jeu s'arrête, sinon on ajoute une boule noire dans l'urne etc...
On définit les événements suivants :
• A l'événement "On effectue une infinité de lancers"
• B l'événement "On tire une boule blanche"
• N l'événement "On tire une boule noire".
1- Pour tout $k \geq 1$, déterminer $P(L_k)$. En déduire $P(A)$.
2- On admet le résultat suivant : $\forall x \in]0,1[$, la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ converge et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$.
Calculer $P(N)$ et $P(B)$.
3- Montrer que pour tout réel x de $]0,1[$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} = \int_0^x \frac{1-t^n}{1-t} dt$.
En déduire le résultat admis en question 2-

Exercice 7 : un joueur lance indéfiniment une pièce de monnaie, dont la probabilité d'apparition de pile est a, et celle de face $b = 1 - a$. S'il obtient pile, il marque un point, s'il obtient face, il marque deux points.
$\forall n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'événement : "Le joueur obtient, au cours du jeu, un score exactement égal à n".
Exemple : si on démarre avec "pile-face-face-pile..." alors dans ce cas A_1 et A_3 sont réalisés, mais ni A_2, ni A_4.
Soit u_n =P(A_n). Calculer u_1 et u_2.
Soit $n \geq 2$, comparer $P(A_{n-1})$ et $P_{"pile au 1er tour"}(A_n)$.
Soit $n \geq 3$: justifier une relation de récurrence entre u_n, u_{n-1} et u_{n-2}. En déduire u_n en fonction de n et de a.

Exercice 8 : Lors d'un traitement, on dispose chaque jour de trois thérapies différentes notées A, B et C.
Une étude statistique sur les pratiques médicales conduit aux résultats suivants : Le 1^{er} jour est utilisée la thérapie A.
Si un jour donné une thérapie est utilisée, on poursuit avec la même le lendemain avec une probabilité p, et on bascule sur l'une ou l'autre des thérapies avec chacune une probabilité de $\dfrac{1-p}{2}$.
Notations : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement : "on utilise la thérapie A le jour n", et a_n =P(A_n).
De même on définit B_n, C_n , b_n =P(B_n), et c_n =P(C_n). On note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

1. Montrer qu'il existe une matrice M de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X_{n+1} = MX_n$.
2. Préciser X_1 et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ donner l'expression de X_n à l'aide de M, n et X_1.
3. On suppose désormais que $p = \dfrac{2}{5}$: On note $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
   (a) Après avoir remarqué que $J^2 = 3J$, montrer que pour $n \geq 1$, $M^n = \left(\dfrac{1}{10}\right)^n I_3 + \dfrac{1}{3}\left(1 - \left(\dfrac{1}{10}\right)^n\right) J$.
   (b) Exprimer a_n, b_n, c_n en fonction de n et étudier la convergence de ces trois suites.

Exercice 9 : Deux joueurs A et B lancent chacun à son tour deux dés. A gagne s'il obtient un total égal à 6, et B s'il obtient un total égal à 7. Le jeu s'arrête dès que l'un des joueurs gagne. Le joueur A commence.
1- Déterminer la probabilité que A gagne à son 1er tour de jeu. On la note p.
2- Déterminer la probabilité conditionnelle sachant que A n'a pas gagné à son 1er tour de jeu, que B gagne à son 1er tour de jeu. On la note p'.
3- Calculer la probabilité que le joueur A gagne. Exprimer $P(A)$ en fonction de p et p'.
4- Calculer la probabilité que le jeu s'arrête. On pourra proposer deux méthodes.

Exercice supplémentaire 10 : Un quart de la population est vaccinée contre une maladie. Lors d'une épidémie, il y a parmi les malades, un vacciné pour 4 non vaccinés. On sait de plus qu'il y a un vacciné malade sur 12 vacciné. déterminer la probabilité pour un individu non vacciné d'être malade.

Exercice supplémentaire 11 : Du dénombrement, sans probabilité...

1. Situation 1 : soit une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5. Combien de tirages possibles de :
   (a) 3 boules lors d'un tirage simultané.
   (b) 3 boules lors de tirages successifs avec remise.
   (c) 3 boules lors de tirages successifs sans remise.
2. Situation 2 : on considère un jeu de 52 cartes, combien de mains de 5 cartes contenant :
   (a) au moins un Valet (b) au plus un Valet (c) le Valet de trèfle (d) des cartes de la même couleur
3. Situation 3 : L'alphabet est constitué de 6 voyelles et de 20 consonnes.
   (a) Combien peut-on constituer de mots distincts composés de 3 consonnes et 2 voyelles. (Chaque lettre ne pouvant apparaître qu'une seule fois)
   (b) Même question en excluant les mots contenant 3 consonnes non séparées de voyelles.
4. Situation 4 : On considère une urne de N boules numérotées de 1 à N, telles que a sont des boules blanches et b des boules noires.
   (a) On effectue n tirages successifs de 1 boules sans remise : Nombre de tirages possibles ? Nombre de tirages contenant au moins une boule noire ?
   (b) On effectue 1 tirage simultané de n boules : Nombre de tirages possibles ? Nombre de tirages contenant au moins une boule noire ?