Autour de la série $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$

On s'intéresse dans ce devoir à la série de terme général $u_n = (-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$ pour $n \geqslant 1$.

1. On note : $\forall n \geqslant 1, w_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln(n)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $w_n - w_{n+1} = \ln(1+\frac{1}{n}) - \frac{1}{n} \times \frac{1}{1+\frac{1}{n}}$.
   (b) Rappeler les développements limités à l'ordre 2 de $\frac{1}{1+x}$ et $\ln(1+x)$ lorsque $x \to 0$.
   (c) En déduire que : $w_n - w_{n+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2n^2}$.
   (d) Montrer que la série de terme général $(w_n - w_{n+1})$ converge, puis que la suite (w_n) converge vers un réel noté γ et appelé constante d'Euler.
2. Dresser le tableau de variations complet de la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\ln(t)}{t}$ sur $]0, +\infty[$.
3. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\ln(k)}{k}$
   (a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n\geqslant 1}$ et $(S_{2n+1})_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.
   (b) Montrer que la série de terme général u_n converge. Est-elle absolument convergente ?
4. On note pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k)}{k} - \frac{[\ln(n)]^2}{2}$ et on admet que la suite $(v_n)_n$ converge.
   (a) Montrer : $\forall n \geqslant 1$, $S_{2n} = 2\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(2k)}{2k} - \sum_{k=1}^{2n}\frac{\ln(k)}{k}$.
   On pourra remarquer : $\sum_{k=1}^{2n} ... = \sum_{\substack{k=1 \\ k\,pair}}^{2n} ... + \sum_{\substack{k=1 \\ k\,impair}}^{2n} ...$
   (b) En déduire que $S_{2n} = \ln(2)\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} + v_n - v_{2n} - \frac{[\ln(2)]^2}{2} - \ln(2)\ln(n)$
5. Démontrer alors que : $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n} = \gamma\ln(2) - \frac{[\ln(2)]^2}{2}$
6. *Facultatif* Le but de cette question est de montrer la convergence de la suite (v_n).
   (a) Justifier que pour tout entier $n \geqslant 3$: $\frac{\ln(n+1)}{n+1} \leqslant \int_n^{n+1}\frac{\ln(t)}{t}dt$.
   (b) En déduire que la suite $(v_n)_{n\geqslant 3}$ est décroissante.
   (c) Montrer que la suite $(v_n)_{n\geq 3}$ est minorée puis conclure.
   Indication : on pourra utiliser une idée similaire au 6.a, sur la somme de $k = 3$ à n afin de minorer le terme v_n.