$\boxed{\text{Correction Exo 4 Fiche 2 :}}$ Retour sur la série harmonique.

1. On obtient cet encadrement avec le même type de méthode que celle utilisée en cours. Faire un dessin.

   Donc pour tout $k \geq 2$, $\int\limits_{k}^{k+1} \frac{1}{t}dt \leq \frac{1}{k} \leq \int\limits_{k-1}^{k} \frac{1}{t}dt$

2. En sommant ces inégalités pour k de 2 à n, et en utilisant la relation de Chasles sur les intégrales on obtient :

   $\int\limits_{2}^{n+1} \frac{1}{t}dt \leq \sum\limits_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \leq \int\limits_{1}^{n} \frac{1}{t}dt$. Donc $1 + \int\limits_{2}^{n+1} \frac{1}{t}dt \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int\limits_{1}^{n} \frac{1}{t}dt$,

   d'où $1 + \ln(n+1) - \ln 2 \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln n$.

   On obtient ainsi un encadrement De S_n pour tout $n \geq 1$. Cherchons maintenant un équivalent de S_n. l'idée est de trouver un équivalent commun aux deux suites qui encadrent $(S_n)_n$. On remarque que l'on peut trouver un équivalent simple de la suite qui est à droite de l'inégalité : $\ln n$.

   En effet : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1+\ln(n)}{\ln n} = 1$.

   Travaillons maintenant sur le terme de gauche :

   $\dfrac{\ln(n+1)}{\ln n} = \dfrac{\ln\left(n(1+\frac{1}{n})\right)}{\ln n} = 1 + \dfrac{\ln\left((1+\frac{1}{n})\right)}{\ln n}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln\left((1+\frac{1}{n})\right)}{\ln n} = 0$,

   donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1-\ln 2+\ln(n+1)}{\ln n} = 1$.

   Or pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1-\ln 2+\ln(n+1)}{\ln n} \leq \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n} \leq \dfrac{1+\ln(n)}{\ln n}$,

   donc par théorème d'existence de limite par encadrement (théorème des gendarmes), $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}}{\ln n} = 1$,

   $$\boxed{\text{donc } \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln n.}$$