$\boxed{\text{Correction Exo 4 Fiche 2 :}}$ Etude de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$, avec α un réel strictement positif.

1. $\boxed{\text{Cas où } 0 < \alpha \leq 1 :}$ Pour $n \geq 1$, $0 < n^\alpha \leq n$ donc $0 \leq \dfrac{1}{n} \leq \dfrac{1}{n^\alpha}$,

   or la série $\sum \dfrac{1}{n}$ diverge, donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ diverge également.

   $\boxed{\alpha \geq 2}$ Pour $n \geq 1$, $0 < n^2 \leq n^\alpha$ donc $0 \leq \dfrac{1}{n^\alpha} \leq \dfrac{1}{n^2}$,

   or la série $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge, donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ converge.

2. $\boxed{\text{Cas où } 1 < \alpha < 2 :}$

   (a) Soit k entier naturel , $k \geq 2$, pour $t \in [k-1, k]$: $0 < \dfrac{1}{k} \leq \dfrac{1}{t}$,

   or la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc $\dfrac{1}{(k)^\alpha} \leq \dfrac{1}{t^\alpha}$,

   par croissance de l'intégrale : les 2 fonctions sont des fonctions continues de la variable t sur $[k-1, k]$, les bornes sont dans l'ordre croissant $k-1 < k$, donc $\dfrac{1}{(k)^\alpha} \leq \int\limits_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha} dt$.

   En notant $v_k = \int\limits_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha} dt$, on a : $\dfrac{1}{(k)^\alpha} \leq v_k$.

   (b) Une primitive sur $\mathbb{R}^{+*}$ de $t \mapsto t^\beta$, pour β un réel est :

   $$t \mapsto \left\{ \begin{array}{ll} \ln(t) & \text{si } \beta = -1 \\ \dfrac{1}{\beta+1} t^{\beta+1} & \text{si } \beta \neq -1 \end{array} \right.$$

   Ainsi, pour tout $k \geq 2$, $\dfrac{1}{(k)^\alpha} \leq \int\limits_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha} dt$,

   donc $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{(k)^\alpha} \leq \sum\limits_{k=2}^{n} \int\limits_{k-1}^{k} \frac{1}{t^\alpha} dt$, donc en utilisant la relation de Chasles, $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{(k)^\alpha} \leq \int\limits_{1}^{n} \frac{1}{t^\alpha} dt$,

   or $1 < \alpha < 2$, donc une primitive de $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est $\dfrac{1}{-\alpha+1} t^{-\alpha+1}$,

   donc : $\sum\limits_{k=2}^{n} \dfrac{1}{(k)^\alpha} \leq \dfrac{1}{-\alpha+1}(n^{-\alpha+1} - 1)$,

   Comme $1 < \alpha < 2$, $-\alpha + 1 < 0$, et $\dfrac{1}{-\alpha+1}(n^{-\alpha+1} - 1) = \dfrac{1}{\alpha-1}\left(1 - \dfrac{1}{n^{\alpha-1}}\right) \leq \dfrac{1}{\alpha-1}$,

   Donc en notant $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k)^\alpha}$, la suite $(S_n)_n$ est majorée, or elle est croissante car $\dfrac{1}{(k)^\alpha} > 0$ pour tout k, donc la suite $(S_n)_n$, et la série $\sum\limits_{k\geq 1} \dfrac{1}{(k)^\alpha}$ converge.

$\boxed{\text{Conclusion de l'exercice : La série } \sum\limits_{n\geq 1} \dfrac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \Leftrightarrow 1 < \alpha.}$