$\boxed{\text{Correction Exercice 7 fiche 2}}$

Soient $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} v_n$ deux séries absolument convergentes.

Les séries étant absolument convergentes, $\lim\limits_{n\to+\infty}|u_n| = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}|v_n| = 0$. Donc pour n assez grand, $|u_n| \leq 1$ et $|v_n| \leq 1$.

Ainsi il existe un entier n_0 tel que : Pour tout $n \geq n_0$, $|u_n| \leq 1$ et $|v_n| \leq 1$,

donc $|(u_n)^2| \leq |u_n|$ et $|u_n v_n| \leq |u_n|$.

Or la série $\sum\limits_{n\geq 0} |u_n|$ converge et est à termes positifs,

Donc par théorème de comparaison des séries à termes positifs, les séries $\sum\limits_{n\geq n_0} |(u_n)^2|$ et $\sum\limits_{n\geq n_0} |u_n v_n|$ convergent,

donc la série $\sum\limits_{n\geq n_0} (u_n)^2$ converge et,
par théorème d'absolue convergence, la série $\sum\limits_{n\geq n_0} (u_n v_n)$ converge.

Donc les séries $\sum\limits_{n\geq 1} (u_n)^2$ et $\sum\limits_{n\geq 1} (u_n v_n)$ convergent. (Le rang de départ ne modifie pas la nature de la série)

Soit un réel λ, alors la série $\sum\limits_{n\geq 0} (\lambda u_n + v_n)^2$ est combinaison linéaire de séries convergentes, donc elle converge.
En effet $(\lambda u_n + v_n)^2 = \lambda^2 u_n^2 + 2\lambda u_n v_n + v_n^2$.