Correction Exo 1-j Fiche 2 :

j-$u_n = \dfrac{n+1}{n!}$ pour $n \geq 0$.

On décompose $u_n = \dfrac{n+1}{n!} = \dfrac{n}{n!} + \dfrac{1}{n!}$

donc pour $n \geq 1$, $u_n = \dfrac{1}{(n-1)!} + \dfrac{1}{n!}$.

Ainsi pour $n \geq 1$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} u_k = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{k+1}{k!} = \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\dfrac{k}{k!} + \dfrac{1}{k!} \right) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(k-1)!} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$

Effectuons un changement d'indice dans la première somme avec $j = k - 1$:

D'où $S_n = \sum\limits_{j=0}^{n-1} \dfrac{1}{j!} + \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k!}$

On reconnaît on reconnaît deux sommes partielles associées à la même série exponentielle, donc ces deux suites de sommes partielles convergent, donc la série $\sum u_n$ converge.

$\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = e + (e-1)$, $\boxed{\text{donc } \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = 2e - 1.}$