Exercice 1 :
Dans chacune des expériences suivantes, préciser le support de X et reconnaître la loi de probabilité de X.

1. On range 20 objets dans 3 tiroirs. X=Nombre d'objets dans le premier tiroir.
2. On considère un jeu de 52 cartes. On retourne une à une les cartes jusqu'à l'obtention du roi de pique. X=Nombre de cartes retournées.
3. Un professeur possède un trousseau de n clés, en apparence identiques. une seule ouvre sa salle de classe. Il essaye une à une chacune des clés du trousseau.
   (a) On suppose qu'après chaque essai infructueux, il écarte la clé essayée. X=Nombre d'essais nécessaire à l'ouverture de la salle.
   (b) On suppose maintenant, que ce professeur très fatigué, fait tomber son trousseau par terre après chaque essai infructueux, et ainsi ne peut pas écarter la dernière clé essayée. X=Nombre d'essais nécessaire à l'ouverture de la salle.

Exercice 2 : soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne contenant une boule numérotée 1, deux boules numérotées 2,..., n boules numérotées n. On effectue des tirages successifs sans remise d'une boule.
(1) Soit T_1 la variable aléatoire donnant le numéro de la 1ère boule tirée. Donner la loi de T_1, et son espérance.
(2) Soit A l'événement "On obtient une boule avec le numéro 1 au 2ième tirage". Déterminer $P(A)$.
(3) Soit B l'événement "On obtient deux boules avec le même numéro aux tirages 1 et 2". Déterminer $P(B)$.

Exercice 3 : On dispose d'une pièce amenant pile avec la probabilité $2/3$. On effectue des lancers indéfiniment. On note X le nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs.
Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, on note $a_n = P(X = n)$. (Exemple : si PPF, alors X=2, si PFFPP, alors X=5)

1. Calculer a_1, a_2, a_3, a_4.
2. On note pour tout $i \geq 1$, F_i="on obtient face au lancer i", et P_i="on obtient pile au lancer i". Soit $n \geq 3$.
   (a) Exprimer $P_{F_1}(X = n)$, $P_{P_1 \cap F_2}(X = n)$ en fonction de a_{n-1} et a_{n-2}.
   (b) Justifier que $a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + \frac{2}{9}a_{n-2}$.
3. En déduire une expression de a_n en fonction de n, pour $n \geq 1$.
4. Prouver que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge et calculer sa somme. Qu'en conclure ?
5. La variable X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 4 : Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant "pile" avec la probabilité p. On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois "pile". Soit X le nombre de "face" obtenus au cours de cette expérience.
(a) Déterminer la loi de X. *Indication :* on trouvera $\mathbb{P}(X = k) = (k + 1)q^k p^2$.
(b) Montrer que X admet une espérance, et la calculer.
(c) Déterminer la probabilité de l'événement "X est pair", puis celle de l'événement "X est impair". Comparer ces deux probabilités.
(d) On reprend l'expérience de départ et on ajoute une étape : si X prend la valeur n, on place $n + 1$ boules numérotées de 0 à n dans une urne, et on tire ensuite une boule de cette urne. On note alors Y le numéro obtenu. Déterminer la loi de Y. Calculer l'espérance de Y.
(e) Écrire une fonction Python qui fait une simulation d'une partie. En sortie, donner la valeur de X.

Exercice 5 : un professeur envoie n invitations à des anciens élèves pour un carrefour des métiers. Chaque élève lui répond avec une probabilité p. ne baissant pas les bras, le professeur effectue un deuxième envoi à ceux qui n'ont pas répondu la première fois. On définit la variable aléatoire X égale au nombre total de réponses.
Calculer $P(X = 0)$, $P(x = 1)$, puis déterminer la loi de probabilité de X. Déterminer son espérance et sa variance.

Exercice 6 : On dit d'une variable aléatoire discrète X, telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ est sans mémoire lorsque :

$$\forall n, m \text{ de } \mathbb{N}^*, P_{X>n}(X > m + n) = P(X > m)$$

Nous avons déjà vu dans le cours qu'une variable aléatoire géométrique en est une.
Soit X une variable aléatoire discrète sans mémoire, telle que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. Notons $a = P(X > 1)$.

1. Montrer que la suite réelle $(P(X > n))_n$ est une suite géométrique de raison a.
2. Donner une relation entre les probabilités : $P(X > n), P(X > n - 1)$ et $P(X = n)$.
3. En déduire la loi de probabilité de la variable X.

Énoncer la propriété démontrée dans cet exercice.

Exercice 7 : Une poule pond en une période T (T=2 jours) un oeuf avec une probabilité p et 2 oeufs avec une probabilité $q = 1-p$. Pour tout entier naturel n non nul, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre d'oeufs pondus par une poule en n périodes.
Soit $n \geq 1$.

1. Sur n périodes considérées, on définit la variable aléatoire S_n égale au nombre de périodes où la poule a pondu 2 oeufs. Quelle est sa loi, son espérance, sa variance ?
2. Exprimer X_n en fonction de n et S_n. En déduire son espérance et sa variance.
3. Y_n est la variable aléatoire égale au nombre de périodes qu'il faut attendre pour atteindre ou dépasser n oeufs pondus.
   (a) Expliquer pourquoi $Y_n(\Omega)$ est inclus dans l'ensemble des entiers de 0 à n
   (b) Montrer que pour tout entier k, $1 \leq k \leq n + 2$, $\mathbb{P}(Y_{n+2} = k) = p\mathbb{P}(Y_{n+1} = k - 1) + q\mathbb{P}(Y_n = k - 1)$
   (c) En déduire que $\mathbb{E}(Y_{n+2}) = p\mathbb{E}(Y_{n+1}) + q\mathbb{E}(Y_n) + 1$
   (d) Question facultative : Démontrer que $\mathbb{E}(Y_n) = \dfrac{n}{1+q} + (1 - (-q)^n)\dfrac{q}{(1+q)^2}$.
4. Ecrire une fonction **`poule`**`(n,p)` prenant comme entrées n, le nombre de période considérées et p et qui donne en sortie le nombre d'oeufs pondus en n périodes.

Exercice 8 : Soit X une variable aléatoire de loi binomiale $B(n, p)$. Chaque résultat de X est affiché sur un compteur détraqué de la façon suivante : Si X n'est pas nul, le compteur affiche le résultat correct, et si X est nul, le compteur affiche un nombre entier au hasard entre 1 et n.
Soit Y le nombre affiché. Déterminer la loi de Y, E(Y) et var(Y).