Correction exercice 8 fiche 3 :
Lors d'un traitement, on dispose chaque jour de trois thérapies différentes notées A, B et C.
Une étude statistique sur les pratiques médicales conduit aux résultats suivants : Le premier jour est utilisée la thérapie A.
Si un jour donné une thérapie est utilisée, on poursuit avec la même le lendemain avec une probabilité p, et on bascule sur l'une ou l'autre des thérapies avec la même probabilité $\frac{1-p}{2}$.
Notations : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'événement : "on utilise la thérapie A le jour n", et $a_n =$P(A_n).
De même on définit B_n, C_n , $b_n =$P(B_n), et $c_n =$P(C_n). On note $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors les événements (A_n, B_n, C_n) forment un système complet d'événements de Ω, donc $A_{n+1} = (A_n \cap A_{n+1}) \cup (A_{n+1} \cap B_n) \cup (A_{n+1} \cap C_n)$
et d'après la fromule des probabilités totales, $P(A_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(A_{n+1} \cap B_n) + P(A_{n+1} \cap C_n)$,
donc $P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$.
Or d'après l'énoncé, $P_{A_n}(A_{n+1}) = p, P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1-p}{2}, P_{C_n}(A_{n+1}) = \frac{1-p}{2}$,
donc $P(A_{n+1}) = pP(A_n) + \frac{1-p}{2}P(B_n) + \frac{1-p}{2}P(C_n)$.
On procède de la même façon pour B_{n+1} et C_{n+1}. On obtient $X_{n+1} = MX_n$ avec $M = \begin{pmatrix} p & \frac{1-p}{2} & \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-p}{2} & p & \frac{1-p}{2} \\ \frac{1-p}{2} & \frac{1-p}{2} & p \end{pmatrix}$.

2. $P(A_1) = 1, P(B_1) = P(C_1) = 0$ donc $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   De plus, on montre par récurrence sur $n \geq 1$ que $X_n = M^{n-1}X_1$. (à faire)

3. On suppose désormais que $p = \frac{2}{5}$: On note $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (a) On remarque que $J^2 = 3J$. De plus $M = \frac{1-p}{2}J + (p - \frac{1-p}{2})I_3 = \frac{1-p}{2}J + \frac{3p-1}{2}I_3$.
   Avec $p = \frac{2}{5}$, $M\frac{3}{10}J + \frac{1}{10}I_3$. Or $JI_3 = I_3J$, donc d'après la formule du binôme de Newton pour deux matrices qui commutent : Pour $n \geq 1$: $M^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{3}{10}\right)^k J^k \left(\frac{1}{10}\right)^{n-k} I_3$.

   On montre par récurrence sur k, que : $J^0 = I_3$ et pour $k \geq 1$ $J^k = 3^{k-1}J$.
   Dans la somme on traite $k = 0$ à part, donc $M^n = \left(\frac{1}{10}\right)^n I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{3}{10}\right)^k \left(\frac{1}{10}\right)^{n-k} 3^{k-1}J$
   On utilise la relation $3^{k-1} = \frac{1}{3}3^k$, et dans la somme on ajoute le terme qui correspond à $k = 0$ et on l'enlève : donc $M^n = \left(\frac{1}{10}\right)^n I_3 + \frac{1}{3}\left(-\left(\frac{1}{10}\right)^n + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{9}{10}\right)^k \left(\frac{1}{10}\right)^{n-k}\right) J$
   On reconnait la formule du binôme de Newton entre réels : $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{9}{10}\right)^k \left(\frac{1}{10}\right)^{n-k} = \left(\frac{9}{10} + \frac{1}{10}\right)^n = 1$.

   $$\boxed{\text{Donc } M^n = \left(\frac{1}{10}\right)^n I_3 + \frac{1}{3}\left(-\left(\frac{1}{10}\right)^n + 1\right) J.}$$

   (b) Ainsi $X_n = M^{n-1}X_1$ avec $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, donc X_n= la première colonne de M^n.
   Donc $a_n = P(A_n) = \left(\frac{1}{10}\right)^n + \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$ et $b_n = c_n = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)$
   $-1 < \frac{1}{10} < 1$ donc $\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$. $\boxed{\text{Donc } \lim_{n \to +\infty} a_n = \lim_{n \to +\infty} b_n = \lim_{n \to +\infty} c_n = \frac{1}{3}.}$