Correction exercice 9 fiche 3 :
L'expérience aléatoire est : " Deux personnes A et B lancent chacune à son tour deux dés. A gagne s'il obtient un total égal à 6, et B s'il obtient un total égal à 7. A commence, le jeu s'arrête dès que l'un des joueurs gagne. Et on observe la succession des résultats obtenus".
L'univers associé est un ensemble de k-uplet, avec k le nombre de tours, et chaque composante étant la valeur obtenue par le joueur.
On remarque que le joueur A joue aux tours impairs et le joueur B aux tours pairs.
Définissons des événements, pour k entier, ≥ 1 :
Pour k impair : A_k="Le tour k a lieu et le joueur A gagne à ce tour" et A'_k="Le tour k a lieu et le joueur A ne gagne pas à ce tour".
De même pour k pair : B_k="Le tour k a lieu et le joueur B gagne à ce tour" et B'_k="Le tour k a lieu et le joueur B ne gagne pas à ce tour".

1. On cherche à calculer $P(A_1)$. Le joueur A commence, donc l'expérience consiste au lancer de deux dés, que l'on peut distinguer (dé 1 et dé 2), et on observe les couples de valeurs obtenues L'univers associé est l'ensemble des couples (i, j) avec i et j appartenant à $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Il y a équiprobabilité sur cet univers et card Ω=36.
   L'événement " A obtient un total de 6" est égal à $\{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$, donc $p = P(A_1)$ =P("On obtient un total de 6") $=\frac{5}{36}$.
2. On cherche à calculer $P_{A'_1}(B_2)$. Sachant que A n'a pas gagné au tour 1, B joue et l'expérience consiste au lancer de deux dés. De la même façon que précédemment, L'événement " B obtient un total de 7" est égal à $\{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6$
   donc $p' = P_{A'_1}(B_2)$=P("On obtient un total de 7") $=\frac{6}{36}$.
3. On cherche à calculer la probabilité que le joueur A gagne.
   • Notons A="Le joueur A gagne". Alors $A = A_1 \cup A_3 \cup ... \cup A_{2n+1} \cup ... = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_{2n+1}$.
   C'est une union infinie d'événements incompatibles 2 à 2, donc d'après la propriété de σ-additivité, la série $\sum P(A_{2n+1})$ converge, et $P(A) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_{2n+1})$.
   Or $A_{2n+1} = A'_1 \cap B'_2 \cap A'_3 \cap ... \cap B'_{2n} \cap A_{2n+1}$, donc d'après la formule des probabilités composées :
   $P(A_{2n+1}) = P(A'_1) \times P_{A'_1}(B'_2) \times ... \times P_{A'_1 \cap ... B'_{2n}}(A_{2n+1})$.
   Chacune des probabilités conditionnelles d'un événement lié au jeu perdant de A vaut $1 - p$ et celles liées au jeu perdant de B vaut $1 - p'$.
   Il y a $2n$+1 tours dont n perdants pour A, n perdants pour B et 1 gagnant pour A, d'où $P(A_{2n+1}) = (1-p)^n(1-p')^n p$,
   Donc $P(A) = p \sum\limits_{n=0}^{+\infty} [(1 - p)(1 - p')]^n$, on reconnaît une série géométrique de raison $[(1 - p)(1 - p')] \in]-1, 1[$, donc la série converge, et
   $P(A) = p\frac{1}{1-(1-p)(1-p')}$. Application numérique : $P(A) = \frac{30}{61}$.

4. On cherche à calculer la probabilité que le jeu s'arrête. Voici deux méthodes.
   De la même façon, on peut noter B l'événement "Le joueur B gagne". Puis notons C="La partie s'arrête".
   • Méthode 1 : On utilise le fait que $(A, B, \bar{C})$ forme un système complet d'événements de Ω, donc $P(C) = P(A)+P(B)$.
   Or $B = B_2 \cup B_4 \cup ... \cup B_{2n} \cup ... = \bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} B_{2n}$, c'est une union infinie d'événements incompatibles 2 à 2, donc d'après la propriété de σ-additivité, la série $\sum P(B_{2n})$ converge, et $P(B) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} P(B_{2n})$.
   Or $B_{2n} = A'_1 \cap B'_2 \cap A'_3 \cap ... \cap B_{2n}$, donc d'après la formule des probabilités composées :
   $P(B_{2n}) = P(A'_1) \times P_{A'_1}(B'_2) \times ... \times P_{A'_1 \cap ... A'_{2n-1}}(B_{2n})$,
   Il y a $2n$ tours dont n perdants pour A, $n-1$ perdants pour B et 1 gagnant pour B, d'où $P(B_{2n}) = (1-p)^n(1-p')^{n-1}p'$.
   Donc $P(B) = p'(1-p) \sum\limits_{n=1}^{+\infty} [(1-p)(1-p')]^{n-1}$, on reconnaît une série géométrique de raison $[(1-p)(1-p')] \in]-1, 1[$, donc la série converge, et $P(B) = p(1-p)\frac{1}{1-(1-p)(1-p')}$. Application numérique : $P(B) = \frac{31}{61}$.
   D'où $P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 1$ et "la partie s'arrête " est un événement quasi-certain.

   • Méthode 2 : On décompose le complémentaire de C comme une intersection infinie.
   $\overline{C} = A'_1 \cap B'_2 \cap A'_3 \cap ... \cap B'_{2n} \cap A_{2n+1} ...$
   donc pour tout $n \geq 0$, $\bar{C} \subset A'_1 \cap B'_2 \cap A'_3 \cap ... \cap B'_{2n} \cap A_{2n+1}$ D'où $0 \leq P(\overline{C}) \leq P(A'_1 \cap B'_2 \cap A'_3 \cap ... \cap B'_{2n} \cap A_{2n+1})$, donc d'après la formule des probabilités composées (RAPPEL : qui ne s'applique que sur une intersection FINIE), $0 \leq P(\bar{C}) \leq (1-p)^{n+1}(1-q)^n$,
   or $[(1-p)(1-q)] \in]-1, 1[$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (1-p)^{n+1}(1-q)^n = 0$, et ainsi par théorème d'existence de limite par encadrement, $P(\overline{C}) = 0$ et $P(C) = 1$.