Corrections exercice 11 fiche 3 Du dénombrement, sans probabilité...

1. Situation 1 : On considère une urne contenant 5 boules numérotées de 1 à 5.

   Combien de tirages possibles de :

   (a) 3 boules lors d'un tirage simultané : On compte le nombre de combinaisons de 3 éléments choisis dans un ensemble à 5 éléments. Il y en a $\binom{5}{3} = \frac{5!}{3!2!} = 10$
   (b) 3 boules lors de tirages successifs avec remise :

   On compte le nombre de 3-listes ordonnées d'éléments, non obligatoirement distincts 2 à 2, choisis dans un ensemble à 5 éléments. C'est le cardinal du produit cartésien $\{1, 2, 3, 4, 5\}^3$, il y en a $5^3 = 125$
   (c) 3 boules lors de tirages successifs sans remise :

   On compte le nombre de 3-listes orsonnées d'éléments, distincts 2 à 2, choisis dans un ensemble à 5 éléments, c'est-à-dire le nombre d'arrangements de 3 éléments choisis dans un ensemble à 5 éléments. Il y en a $5\times4\times3 = 60$.
2. Situation 2 : On considère un jeu de 52 cartes, combien de mains de 5 cartes contenant :

   Remarque 1 : Une main est une combinaison de 5 éléments : les éléments sont distincts 2 à 2, et ils ne sont pas ordonnés.
   Remarque 2 : Un jeu de 52 cartes est constitué de 4 valets, dont 1 seul valet de trèfle. les cartes sont de 4 couleurs différentes, avec 13 cartes dans chaque couleur.

   (0) Combien de mains différentes possibles : $\binom{52}{5} = \frac{52!}{47!5!}$.
   (a) au moins un Valet : On peut considérer l'ensemble complémentaire "sans valet" : son cardinal est le nombre de combinaisons de 5 éléments choisis dans un ensemble à 52-4=48 éléments, c'est-à-dire $\binom{48}{5}$, donc le nombre de mains avec au moins un valet est $\binom{52}{5} - \binom{48}{5}$
   (b) au plus un Valet : C'est le nombre de mains avec 0 valet + le nombre de mains avec un seul valet.
   Or le nombre de mains avec un seul valet= Nombre de combinaison d'un seul élément égal à un valet $\times$ le nombre de mains de 4 éléments sans valet=$4\binom{48}{4}$
   D'où le nombre de mains avec au plus un valet : $\binom{48}{5} + 4\binom{48}{4}$
   (c) le Valet de trèfle : Le valet de trèfle est imposé, le reste est une main de 4 cartes choisies dans un ensemble de 51 cartes : $\binom{51}{4}$
   (d) des cartes de la même couleur : $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$, avec $D_i =$ "ensemble des mains de 5 cartes toutes de couleur i", C'est une union d'ensembles disjoints, donc card$D = \sum$card D_i.
   Pour un i donné : D_i= ensemble des mains de 5 cartes choisies dans un ensemble de 13 éléments, donc card$D_i = \binom{13}{5}$. D'où card$D = 4\binom{13}{5}$.
3. Situation 3 : L'alphabet est constitué de 6 voyelles et de 20 consonnes.

   (0) Combien de mots de 5 lettres ? Un mot de 5 lettres est une 5-liste ordonnée de lettres non obligatoirement distinctes, choisies dans l'alphabet de 26 lettres, dons il y a 26^5 mots possibles.

   Si on impose que les 5 lettres soient distinctes 2 à 2, alors il s'agit d'une 5-liste ordonnée d'éléments distincts choisis dans un ensemble de 26 éléments, il y en a $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 = \frac{26!}{21!}$

   (a) Combien peut-on constituer de mots distincts composés de 3 consonnes et 2 voyelles, chaque lettre ne pouvant apparaître qu'une seule fois. Un tel mot est une liste ordonnée d'éléments distincts : 3 de ses éléments forment une combinaison de 3 éléments choisis dans un ensemble de 20 éléments, et les 2 autres forment une combinaison de 2 élements choisis dans un ensemble de 6 éléments. Ces 5 éléments distincts choisis, il y a 5 ! façons de les ordonner dans une liste de 5 éléments.

   D'où $5!\binom{20}{3}\binom{6}{2}$

   (b) Même question en excluant les mots contenant 3 consonnes non séparées de voyelles : ce qui change ici, est le nombre de façons de placer les lettres dans la 5-liste ordonnée.

   On ne garde que les mots du type : consonne-voyelle-consonne-voyelle-consonne. Il y a donc 2 façons de placer les 2 voyelles, et 3 ! façons de placer les 3 consonnes,

   d'où $2 \times 3! \times \binom{20}{3}\binom{6}{2}$

4. Situation 4 : On considère une urne de N boules numérotées de 1 à N, telles que a sont des boules blanches et b des boules noires.

   (a) On effectue n tirages successifs de 1 boule sans remise :

   Nombre de tirages possibles ? Un tirage est une n-liste ordonnée d'éléments distincts 2 à 2, choisis dans un ensmble à N éléments donc :

   Nombre de tirages possibles$=N \times (N-1) \times ... \times (N-n+1) = \frac{N!}{(N-n)!}$

   Nombre de tirages contenant au moins une boule noire ? C'est le nombre total de tirages possibles - le nombre de tirages ne contenant pas de boules noires.
   C'est-à-dire : $\frac{N!}{(N-n)!} - \frac{a!}{(a-n)!}$. (On suppose $a >\geq n$)

   (b) On effectue 1 tirage simultané de n boules :

   Nombre de tirages possibles ? Un tirage est une combinaison de n éléments choisis dans un ensemble à N éléments donc :

   Nombre de tirages possibles$=\binom{N}{n}$

   Nombre de tirages contenant au moins une boule noire ? C'est le nombre total de tirages possibles - le nombre de tirages ne contenant pas de boules noires.
   C'est-à-dire : $\binom{N}{n} - \binom{a}{n}$