Fiche d'exercices n°5 : Autour des polynômes 16 octobre 2024

Exercice 1 :

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le degré de P en fonction de n.
   (1) $P = \prod_{k=0}^{n} (3X - k)$ (2) $n \in \mathbb{N}$, $P = X^{n-1}(X - n) - (X+1)^n$
2. Soient $P \in \mathbb{C}[X]$ et $Q = 4XP - (X^2 - 1)P'$. Déterminer $deg(Q)$ suivant le degré de P.
3. Soient $n \geq 0$ et $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et $Q = (X+1)P + n(1 - X^2)P'$. Déterminer $deg(Q)$ suivant le degré de P.

Exercice 2 : trouver tous les polynômes de $\mathbb{R}_4[X]$ tels que $P(0) = 0, P(-2) = 0, P'(-2) = 0$.

Exercice 3 : trouver tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$.

Exercice 4 : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Le polynôme conjugué de P est $\overline{P} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k} X^k$.

1. Justifier que pour tout z de $\mathbb{C}$, $\overline{P(z)} = \overline{P}\,(\overline{z})$.
2. Montrer : Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Si α est racine de P alors $\overline{\alpha}$ est racine de P.
3. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ non réel. Montrer que le polynôme $(X - \alpha)(X - \overline{\alpha})$ est un polynôme à coefficients réels, de degré 2 et de discriminant strictement négatif.

Exercice 5 : Factoriser au maximum les polynômes suivants dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le cas échéant :

- $P(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2$.
- $Q(X) = X^3 + 2X^2 - 3$.
- $R(X) = X^3 - 5X^2 + X - 5$.
- $S(X) = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3X + 1$.
- $T(X) = 5X^3 + 17X^2 + 8X - 12$ sachant que T admet une racine multiple.

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{C}^2$: (1) $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 5 \end{cases}$. (2) $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases}$.

Exercice 7 : . Définition : Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Le polynôme P divise le polynôme Q signifie qu'il existe un polynôme R de $\mathbb{K}[X]$ tel que $Q = PR$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(X^2 + X + 1)$ divise $X^{2n+3} - X^{2n} + 3X^{n+3} - 3X^n + X^3 - 1$.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(X^2 + 2X + 1)$ divise $X^{2n+4} + 2X^{2n+3} + 3X^{2n+2} + 4X^{2n+1} + 2X^{2n}$.

Exercice 8 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout k de 0 à $n - 1$, on note $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

1. Soit $P = \sum_{j=0}^{n-1} X^j$. Donner le degré du polynôme P.
2. Pour tout k de 0 à $n - 1$, calculer $P(w_k)$. En déduire la forme factorisée de P dans $\mathbb{C}[X]$.
3. Notons R l'ensemble des racines complexes de P. Montrer que : $\forall k \in [\![0, n-1]\!], \overline{w_k} \in R$.
4. En déduire la forme factorisée maximale de P dans $\mathbb{R}[X]$.
5. Pour poursuivre la manipulation de nombres complexes et de polynômes :
   (a) Pour les cas $n = 2$, puis $n = 3$, puis $n = 4$, représenter graphiquement les points d'affixes les $(w_k)_k$.
   (b) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Ecrire $1 - w_k$ Exprimer $|1 - w_k|$ en fonction de $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
   (c) On note $w = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. En évaluant de deux manières le polynôme P en 1, montrer : $n = (1 - w)\left(1 - w^2\right) ... \left(1 - \right.$
   Puis en travaillant sur le module, montrer : $\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n} ... \sin\frac{(n-1)\pi}{n} = \frac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice 9 : Déterminer les réels a, b, c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1, -2\}$, $\frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x+2} = \frac{1}{x(x+1)(x+2)}$.

Exercice 10 - Supplémentaire : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, tel que pour tout réel z, $P(z)$ est encore réel.
Montrer que $P \in \mathbb{R}[X]$.
(Indication : Travailler sur $Q = \overline{P}$ et montrer que $(Q - P)(z) = 0$ pour tout réel z. Conclure.)

Exercice 11 - Supplémentaire : Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$, tels que P se factorise par P'.