Fiche d'exercices 6 : Espaces vectoriels 7 novembre 2024

Exercice 1 : combinaisons linéaires

1. Montrer que $P = 4X^2 - 5X - 1$ est combinaison linéaire de $Q = 2X^2 - X - 1$ et $R = X^2 + X - 1$.
2. $A = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -6 & -2 \end{pmatrix}$ est-elle combinaison linéaire de $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $M_3 = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$?

Exercice 2 : familles génératrices

1. Montrer que $((1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1))$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $F = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ t & z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) / x + y - 2z = 0 \right\}$.
   Justifier que F est un espace vectoriel, déterminer une famille génératrice de F.
3. Soit $H = \{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(1) = P'(1) = 0\}$.
   Justifier que H est un espace vectoriel, déterminer une famille génératrice de H.
4. Soit E un un espace vectoriel.
   Soit (u, v) une famille génératrice de E, montrer que $(u + v, u - v)$ est une famille génératrice de E.

Exercice 3 : familles libres ou liées

1. La famille formée de $u_1 = (0,-1,1)$, $u_2 = (1,0,-1)$ et $u_3 = (-1,1,0)$ est-elle une famille libre ou liée de $\mathbb{R}^3$?
2. A quelles conditions sur le réel t, la famille formée de $P_1 = 1 + X + X^2$, $P_2 = 1 + 2X + 4X^2$, et $P_3 = 1 + tX + t^2X^2$ est une famille libre ?
3. Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   (i) On définit : $f : x \mapsto |x-1|$, $g : x \mapsto |x-2|$, $h : x \mapsto |x-3|$. Montrer que (f, g, h) est une famille libre de E.
   (ii) On définit : $f : x \mapsto x - 1$, $g : x \mapsto x - 2$, $h : x \mapsto x - 3$. (f, g, h) est-elle libre ou liée ?.
4. Soit E un un espace vectoriel.
   Soit (u, v) une famille libre de E, montrer que $(u + v, u - v)$ est une famille libre ou liée de E ?

Exercice 4 : intersection d'espaces vectoriels

1. Soient F=Vect$((3,-1,-1),(1,-1,-1))$ et G=Vect$((2,1,-1),(1,2,1))$.
   Déterminer une base et la dimension de $F \cap G$.
2. Soient $F = \{a - b + (2a + 3b)X + bX^2 ; (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$ et $G = \{5cX + cX^2 ; c \in \mathbb{R}\}$.
   Déterminer une base et la dimension de $F \cap G$.

Exercice 5 : égalités d'espaces vectoriels

1. Soit $E = \mathbb{R}_2[X]$. Soient $P_1 = 2X^2 + 2X$, $P_2 = X^2 + 2X + 1$, $P_3 = 3X^2 + X - 2$.
   Soit F=Vect(P_1, P_2, P_3) et $G = \{xX^2 + yX + z \in E ; x - y + z = 0\}$. Montrer que $F = G$.
2. Soit $E = \mathbb{R}^3$: montrer que Vect$((2,3,-1),(1,-1,-2))$=Vect$((3,7,0),(5,0,-7))$.

Exercice 6 : Soit l'espace vectoriel E=$\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et soit $H = Vect(A_1, A_2, A_3, A_4)$ avec :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

.

1. Déterminer une base de H.
2. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur a, b, c, d qui caractérisent parmi les vecteurs $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de E ceux qui appartiennent à H.

Exercice 7 : démontrer que les ensembles suivant ont une structure d'espaces vectoriels, et en préciser lorsqu'elle existe une base. ($n \in \mathbb{N}^3$)

A=$\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 / x+y-z = 2x-t+z = 0\right\}$

B=$\left\{(x_1,...,x_n) \in \mathbb{R}^n / \sum\limits_{k=1}^{n} x_k = 0\right\}$

C=$\{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(1) = P(3) = 0\}$

D=$\{P \in \mathbb{R}_3[X] / P(1) = P'(1) = 0\}$

E=$\{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) / y' = -7y\}$

F=$\{y \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R}) / y'' + 4y' + 5y = 0\}$

G=$\left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M^T = M\right\}$

H=$\left\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M^T = -M\right\}$

Exercice 8 : Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On note F=$\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / AM = MA\}$.

1. Justifier que F est un espace vectoriel de dimension finie. Déterminer une base de F.
2. Montrer que la famille (I_3, A, A^2) est une base de F.
3. Justifier que pour tout entier $n \geq 3$, il existe des réels a_n, b_n, c_n tels que $A^n = a_n I_3 + b_n A + c_n A^2$.

Exercice 9 : Vrai-Faux :
Soit E un $\mathbb{R}-$espace vectoriel et $(a_1, a_2, ..., a_n)$ une famille de vecteurs de E, $n \geq 4$.

1. Si la famille (a_1, a_2) est liée, alors il existe un réel λ tel que $a_2 = \lambda.a_1$.
2. Si les vecteurs (a_1, a_2) ne sont pas colinéaires alors la famille (a_1, a_2) est libre.
3. Si les vecteurs (a_1, a_2, a_3, a_4) sont deux à deux non colinéaires alors la famille (a_1, a_2, a_3, a_4) est libre.
4. Si la famille $(a_1, a_2, ..., a_n)$ est liée alors a_n est combinaison linéaire des vecteurs $(a_1, ..., a_{n-1})$.
5. Si $(a_1, ..., a_{n-1})$ est libre et $(a_1, ..., a_n)$ liée alors a_n est combinaison linéaire des vecteurs $(a_1, ..., a_{n-1})$.

Exercice 10 supplémentaire : soit $E = \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Soit F, respectivement G, l'ensemble des matrices de E symétriques, respectivement antisymétriques.

1. Pour toute matrice M de E, montrer que s'il existe un couple (S, A) de $F \times G$ tel que $M = S + A$, alors $S = \dfrac{M + M^T}{2}$ et $A = \dfrac{M - M^T}{2}$.
2. prouver alors que pour toute matrice M de E, il existe un unique couple (S, A) de $F \times G$ tel que $M = S + A$.

On note H l'ensemble des matrices de E telles que la somme des éléments de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est nulle.

3. Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E.
4. Soit $M \in E$ et soit $(A, S) \in F \times G$ tel que $M = S + A$. Montrer : $M \in H \Leftrightarrow (S \in H$ et $A \in H)$.
5. Déterminer une base et la dimension de $H \cap F$ et de $H \cap G$.
6. En déduire une base et la dimension de H.
7. (plus difficile) Déterminer toutes les matrices magiques de taille 3 (c'est-à-dire la somme des éléments de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale est la même).

Exercice supplémentaire 11 : Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(f_0, f_1, ..., f_n)$ la famille de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par : $\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = \cos(kx)$.

1. Montrer que la famille (f_0, f_1) est libre.
2. Montrer que pour tout entier naturel n, la famille $(f_0, f_1, ..., f_n)$ est libre.