Exercice 5 : Factoriser au maximum les polynômes suivants dans $\mathbb{C}$ puis dans $\mathbb{R}$ le cas échéant :
• $P(X) = X^3 - 4X^2 + 5X - 2 = (X-1)^2(X-2)$.
• $Q(X) = X^3 + 2X^2 - 3 = (X-1)(X^2+3X+3) = (X-1)(X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$ avec $\alpha = -\sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$.
• $R(X) = X^3 - 5X^2 + X - 5 = (X-i)(X+i)(X-5) = (X-5)(X^2+1)$.
• $S(X) = X^4 + 3X^3 + 4X^2 + 3X + 1 = (X+1)^2(X^2+X+1)$, -1 est racine multiple, puis $S(X) = (X+1)^2(X-\alpha)(X-\overline{\alpha}) =$ avec $\alpha = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
• $T(X) = 5X^3 + 17X^2 + 8X - 12$, on ne trouve pas de racine évidente. D'après l'indication de l'énoncé, on cherche a une racine multiple, c'est-à-dire tel que $\begin{cases} 5a^3 + 17a^2 + 8a - 12 = 0 \\ 15a^2 + 34a + 8 = 0 \end{cases}$
D'où, $3L_1$-aL_2 donne $17a^2 + 16a - 36 = 0$, dont le discriminant est $\Delta = 16^2 + 4 * 17 * 36 = 52^2$, donc $a = -2$ ou $a = \frac{18}{17}$.
On peut alors vérifier que -2 est racine de T, et il existe un réel b tel que $T(X) = 5(X+2)^2(X+b)$,
et en regardant les termes constants, on trouve $20b = -12$, donc $b = -\dfrac{3}{5}$.
Donc $T(X) = (X+2)^2(5X-3)$.

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{C}^2$: (1) $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 5 \end{cases}$. (2) $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases}$.

On utilise la propriété sur le lien entre coefficients racines des polynômes de second degré.
(1) (x, y) sont solutions de $\begin{cases} x + y = 6 \\ xy = 5 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ x et y sont les racines du polynôme $X^2 - 6X + 5$.
On trouve $\mathcal{S} = \{(5,1), (1,5)\}$.
(2) (x, y) sont solutions de $\begin{cases} x + y = 2 \\ xy = 2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ x et y sont les racines du polynôme $X^2 - 6X + 5$.
On trouve $\mathcal{S} = \{(1+i, 1-i), (1-i, 1+i)\}$.

Exercice 7 : . Définition : Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Le polynôme P divise le polynôme Q signifie qu'il existe un polynôme R de $\mathbb{K}[X]$ tel que $Q = PR$.

1. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(X^2 + X + 1)$ divise $Q = X^{2n+3} - X^{2n} + 3X^{n+3} - 3X^n + X^3 - 1$.
   Montrons que les racines du polynôme $(X^2 + X + 1)$ sont aussi racine du polynôme Q :
   Les racines de $(X^2 + X + 1)$ sont $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $\overline{j}$. On remarque que $j^3 = 1$, et $Q(j) = 0$. Donc comme Q est à coefficients réels $Q(\overline{j}) = 0$, donc $(X-j)(X-\overline{j}) = X^2 + X + 1$ divise Q.
2. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $(X^2 + 2X + 1)$ divise $X^{2n+4} + 2X^{2n+3} + 3X^{2n+2} + 4X^{2n+1} + 2X^{2n}$.
   -1 est racine double de $(X^2 + 2X + 1)$. On montre que $Q(-1) = 0$ et $Q'(-1) = 0$. Donc -1 est racine multiple de Q donc $(X-1)^2 = X^2 + 2X + 1$ divise Q.

Exercice 8 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout k de 0 à $n-1$, on note $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.

1. Soit $P = \sum\limits_{j=0}^{n-1} X^j$.$P$ est de degré $n-1$.
2. • Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$: alors $P(w_k) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} w_k^j$.
   On reconnait la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$.
   Or $\boxed{\text{pour } k = 0}$ la raison $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = 1$, donc $P(w_0) = n \neq 0$.
   Et $\boxed{\text{pour } k \in [\![1, n-1]\!]}$, $0 < frac2k\pi n \leq frac2(n-1)\pi n < 2\pi$ donc la raison $e^{i\frac{2k\pi}{n}} \neq 1$,
   et $P(w_k) = \dfrac{1 - e^{i\frac{2kn\pi}{n}}}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = \dfrac{0}{1 - e^{i\frac{2k\pi}{n}}} = 0$.
   • Ainsi P est de degré $n-1$, donc admet au plus $n-1$ racines distinctes.
   Or P admet $w_1, ...w_{n-1}$ comme racines. Ce sont $n-1$ racines distinctes deux à deux. En effet, $0 <$

$frac2\pi n < frac4\pi n < ... < frac2(n-1)\pi n < 2\pi$.
• Conclusion : Donc ce sont les $n-1$ racines de P, ainsi $P = (X - w_1)(X - w_2)...(X - w_{n-1})$.

3. Notons R l'ensemble des racines complexes de P. Ainsi $R = \{w_k / k \in [\![1, n-1]\!]\}$. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$, alors $w_k = e^{-i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i2\pi - i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2n\pi - 2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2(n-k)\pi}{n}} = e^{i\frac{2t\pi}{n}}$ avec $t = n - k$, donc $t \in [\![1, n-1]\!]$.
Ainsi $\forall k \in [\![1, n-1]\!], \overline{w_k} \in R$ (Attention, erreur dans l'énoncé, $w_0 \notin R$).

4. • Cas où n est impair, alors $n-1$ est pair, donc P admet les $\frac{n-1}{2}$ complexes $w_1, ...w_{\frac{n-1}{2}}$ comme racines et leurs conjugués.
Donc $P = (X - w_1)(X - \overline{w_1})(X - w_2)(X - \overline{w_2})...(X - w_{\frac{n-1}{2}})(X - \overline{w_{\frac{n-1}{2}}})$
Donc $P = (X^2 - 2Re(w_1) + 1)(X^2 - 2Re(w_2) + 1)...(X^2 - 2Re(w_{\frac{n-1}{2}}) + 1) = (X^2 - 2\cos(frac2\pi n) + 1)(X^2 - 2\cos(frac4\pi n) + 1)...(X^2 - 2\cos(frac(n-1)\pi n) + 1)$.
Ceci est la forme factorisée maximale de P dans $\mathbb{R}[X]$.

5. Pour aller plus loin :
   (a) Pour les cas $n = 2$, puis $n = 3$, puis $n = 4$, on peut représenter graphiquement les points d'affixes les $(w_k)_k$. Ils sont sur le cercle trigonométrique et forment un polygone régulier de n côtés (pour $n \geq 3$).
   (b) Soit $k \in [\![0, n-1]\!]$. Alors $1 - w_k = e^{i0} - e^{i\frac{2k\pi}{n}}$. On factorise par l'angle moitié.
   Donc $1 - w_k = e^{i\frac{k\pi}{n}}\left(e^{-i\frac{k\pi}{n}} - e^{i\frac{k\pi}{n}}\right) = e^{i\frac{k\pi}{n}}(-)2isin\,(frack\pi n) = 2sin\,(frack\pi n)\,e^{i\frac{k\pi}{n} - i\frac{\pi}{2}}$.
   C'est une forme du type $ae^{i\alpha}$ avec a réel et α réel. On ne peut pas directement dire que c'est une forme trigonométrique de $1 - w_k$. Il nous faut étudier le signe de $2sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$.
   Or $k \in [\![0, n-1]\!]$, donc $0 \leq k \leq n-1$, donc $0 \leq frack\pi n \leq frac(n-1)\pi n < \pi$.
   Donc $2sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) > 0$.
   Ainsi $|1 - w_k| = 2sin\,(frack\pi n)$ et $\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{2}$ est un argument de $1 - w_k$.
   (c) Dans la question 3., nous avons vu que $P(W_0) = P(1) = n$.
   Et d'après la factorisation trouvée en question 4., $P = (X - w_1)(X - w_2)...(X - w_{n-1})$, donc $P(1) = (1 - w_1)(1 - w_2)...(1 - w_{n-1})$.
   Or pour tout k, $w_k = w^k$. Ainsi nous avons l'égalité suivante : $n = (1 - w)\left(1 - w^2\right)...\left(1 - w^{n-1}\right)$.
   Puis en passant au module dans cette égalité, on obtient : $n = |1 - w|\left|1 - w^2\right|...\left|1 - w^{n-1}\right|$.
   D'après la question 5.b, pour tout k de 0 à $n-1$, $|1 - w_k| = 2sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$
   Donc $n = 2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}...\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n}$.
   Ainsi : $\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}...\sin\dfrac{(n-1)\pi}{n} = \dfrac{n}{2^{n-1}}$.

Exercice 7 : Déterminer les réels a, b, c tels que : $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0, -1, -2\}$, $\dfrac{a}{x} + \dfrac{b}{x+1} + \dfrac{c}{x+2} = \dfrac{1}{x(x+1)(x+2)}$.
Voir que l'on utilise la propriété sur les polynômes : Si deux polynômes prennent la même valeur pour une infinité de réels, alors ces deux polynômes sont égaux.
On trouve : $a = \frac{1}{2}$, $b = -1$ et $c = \frac{1}{2}$.

Exercice 9 - Supplémentaire : Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, tel que pour tout réel z, $P(z)$ est encore réel.
Notons $Q = \overline{P}$. Soit z un réel, alors $z = \overline{z}$ donc $Q(z) = Q(\overline{z})$.
Donc $Q(z) = \overline{P\overline{z}} = P(z)$, d'après la propriété vue dans l'exercice 3.
Donc pour tout réel z, $(Q - P)(z) = 0$. Ainsi $Q - P$ admet une infinité de racines, donc $Q - P$ est le polynôme nul, donc $Q = P$.
Donc $P = \overline{P}$, donc tous les coefficients de P sont réels, donc $P \in \mathbb{R}[X]$.