Semaine du lundi 18 novembre 2024 au vendredi 22 novembre 2024
Semaine 7

Polynômes

— Degré, coefficient dominant
— Opérations : somme, produit, composée
— Racine d'un polynôme, caractérisation
— Racine multiple, caractérisation
— Ordre de multiplicité d'une racine, définition.
Attention la caractérisation par les dérivées successives est hors-programme
— Relation coefficients-racines pour les polynômes de degré 2

Algèbre : Espaces vectoriels

— Structure d'espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Règles de calcul. Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
— Sous-espaces vectoriels. Intersection de deux sous-espaces vectoriels.
— Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie de vecteurs.
— Famille finie de vecteurs : génératrice, libre, liée, base.
— Une famille finie de polynômes non nuls de degrés distincts deux à deux est libre.
— Espaces vectoriels de dimension finie.

Remarque : pour cette semaine, les propriétés spécifiques des familles de vecteurs en dimension finie n'ont pas été vues.

Questions de cours ou petit exercice :

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Si α est racine de P alors $\overline{\alpha}$ est racine de P.
2. soit $P(X) = X^4 + X^3 - 2X^2 - 3X + 3$. Justifier que 1 est racine multiple du polynôme P.
Puis factoriser P en produits de polynômes du 1er degré de $\mathbb{C}[X]$.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}^2$: $\begin{cases} x + y = \sqrt{2} \\ xy = 2 \end{cases}$.
Donner l'écriture algébrique, le module et un argument des solutions.
4. On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$. Soient $P_0 = 1$, $P_1 = X - 1$ et $P_2 = (X-1)^2$.
Montrer que le polynôme $P = 3X^2 + X - 1$ est combinaison linéaire des vecteurs P_0, P_1, P_2.
5. Toute sous-famille d'une famille libre est libre.
6. Si la famille $(X_1, X_2, ..., X_n)$ est liée, alors au moins un des vecteurs de la famille s'écrit comme combinaison linéaire des autres.
7. Si un vecteur s'écrit comme combinaison linéaire d'une famille libre, alors cette écriture est unique.
8. Toute famille finie de polynômes non nuls de degrés distincts deux à deux est libre.