Correction exercice 3 fiche 4 : On effectue des lancers successifs d'une pièce dont la probabilité d'obtenir pile est $p = 2/3$. On effectue des lancers indéfiniment. On note X la nombre de lancers nécessaires pour obtenir, pour la première fois, deux piles consécutifs. Pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, on note $a_n = P(X = n)$. (Exemple : si PPF, alors X=2, si PFFPP, alors X=5).
On note pour tout $i \geq 1$, F_i="on obtient face au lancer i", et P_i="on obtient pile au lancer i".

1. Calculer a_1, a_2, a_3, a_4 :
   $(X = 1) = \emptyset$, donc $a_1 = 0$.
   $(X = 2) = P_1 \cap P_2$, et comme les lancers sont infinie, P_1 et P_2 sont deux événements indépendants, donc $a_2 = P(P_1)P(P_2) = p^2$.
   $(X = 3) = (F_1 \cap P_2 \cap P_3)$, les 3 événements sont mutuellement indépendants, donc $a_3 = (1-p)p^2$.
   $(X = 4) = (P_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) \cup (F_1 \cap F_2 \cap P_3 \cap P_4) = F_2 \cap P_3 \cap P_4$, donc $a_4 = (1-p)p^2$.
2. Soit $n \geq 3$.
   (a) Exprimer $P_{F_1}(X = n)$, $P_{P_1 \cap F_2}(X = n)$ en fonction de a_{n-1} et a_{n-2} :
   • $P_{F_1}(X = n)$: c'est comme si on commençait l'expérience au 2ième lancer, et on obtenait le 1er doublé de pile, au lancer $n-1$. Donc $P_{F_1}(X = n) = P(X = n-1) = a_{n-1}$
   • $P_{P_1 \cap F_2}(X = n)$: c'est comme si on commençait l'expérience au 3ième lancer, et on obtenait le 1er doublé de pile, au lancer $n-2$. Donc $P_{P_1 \cap F_2}(X = n) = a_{n-2}$.
   Remarque : pour $n = 3$, on trouve que $P_{P_1 \cap F_2}(X = 3) = 0 = a_1$.
   (b) Justifier que $a_n = \dfrac{1}{3}a_{n-1} + \dfrac{2}{9}a_{n-2}$:
   Décomposons l'événement $(X = n)$ sur le système complet (P_1, F_1) :
   ainsi, $(X = n) = (F_1 \cap (X = n)) \cup (P_1 \cap (X = n))$ or $n \geq 3$, donc $P_1 \cap (X = n) = P_1 \cap F_2 \cap (X = n)$.
   Donc c'est une union de 2 événements incompatibles, donc par additivité :
   $P(X = n) = P(F_1 \cap (X = n)) + P(P_1 \cap F_2 \cap (X = n)) = P(F_1)P_{F_1}(X = n) + P(P_1)P_{P_1 \cap F_2}(X = n)$
   D'où $a_n = \dfrac{1}{3}a_{n-1} + \dfrac{2}{9}a_{n-2}$
3. On reconnait une suite vérifiant une relation linéaire de récurrence d'ordre 2, dont l'équation caractéristique associée est : $r^2 - \frac{1}{3}r - \frac{2}{9}$ c-à-d $9r^2 - 3r - 2 = 0$.
   Remarque : les termes de la suite $(a_n)_n$ concernés par la relation de récurrence sont les termes pour $n \geq 1$.
   $\Delta = 9 + 72 = 81$, les solutions de l'équation caractéristique sont $r_1 = \frac{3-9}{18} = -\frac{1}{3}$ et $r_2 = \frac{3+9}{18} = \frac{2}{3}$.
   Donc il existe A et B réels tels que pour tout $n \geq 1$, $u_n = A(-\frac{1}{3})^n + B(\frac{2}{3})^n$.
   On détermine A et B à l'aide des conditions initiales, ici $a_1 = 0$ et $a_2 = \frac{4}{9}$, on résout :
   $\begin{cases} 0 & = -\frac{1}{3}A + \frac{2}{3}B \\ \frac{4}{9} & = \frac{1}{9}A + \frac{4}{9}B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 & = -A + 2B \\ 4 & = A + 4B \end{cases} \Leftrightarrow A = \frac{4}{3}$ et $B = \frac{2}{3}$. $B = \frac{2}{3}$ et $A = \frac{4}{3}$.
   Ainsi pour tout $n \geq 1$, $\mathbb{P}(X = n) = a_n = \frac{4}{3}(-\frac{1}{3})^n + (\frac{2}{3})^{n+1}$.
4. Les deux séries géométriques $\sum\limits_{n\geq 1} (-\frac{1}{3})^n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} (\frac{2}{3})^n$ ont respectivement comme raison $-\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$, qui appartiennent chacune à $]-1, 1[$, donc ces deux séries sont convergentes.
   La série $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ est la combinaison linéaire de ces deux séries, donc par propriété de linéarité des séries convergentes, elle converge, et $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{4}{3}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-\frac{1}{3})^n + \frac{2}{3}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(\frac{2}{3})^n$.
   Or pour $q \in]0, 1[$, $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} q^n = -1 + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = -1 + \dfrac{1}{1-q} = \dfrac{q}{1-q}$. Donc $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n = \frac{4}{3}\dfrac{-1/3}{1+\frac{1}{3}} + \frac{2}{3}\dfrac{2/3}{1-\frac{2}{3}} = 1$.
   Qu'en conclure ? La loi de probabilité trouvée pour la variable aléatoire X est cohérente !
5. Rappel : $E(X)$ existe si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq 1} nP(X = n)$ converge absolument,
   et dans ce cas, $E(X) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} nP(X = n)$.
   • Existence : pour tout $n \geq 1$, $nP(X = n) \geq 0$, donc la convergence absolue est la même chose que la convergence. De plus, de $nP(X = n) = na_n = n\left(\frac{4}{3}(-\frac{1}{3})^n + (\frac{2}{3})^{n+1}\right) = \frac{4}{3}\frac{-1}{3}\left(n(-\frac{1}{3})^{n-1}\right) + (\frac{2}{3})^2\left(n(\frac{2}{3})^{n-1}\right)$, c'est une combinaison linéaire des termes généraux de deux séries géométriques dérivées de raisons respectives appartenant à $]-1, 1[$, donc convergentes. Donc la série $\sum\limits_{n\geq 1} nP(X = n)$ converge, et converge absolument, donc $E(X)$ existe.
   • Valeur de $E(X)$: $E(X) = \frac{4}{3}\frac{-1}{3}\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(n(-\frac{1}{3})^{n-1}\right) + (\frac{2}{3})^2\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(n(\frac{2}{3})^{n-1}\right)$, donc $E(X) = ... = \dfrac{15}{4}$.