

Semaine du lundi 2 décembre au vendredi 7 décembre 2024
Semaine 9

Espaces vectoriels Programme de la semaine 8.

Applications linéaires

- Définition. Opérations sur les applications linéaires ($+$, $.$, \circ , application réciproque).
- Noyau, image, propriétés.
- Caractérisation de f injective, f surjective, f bijective, f inversible.
- Opérations sur les applications linéaires ($+$, $.$, \circ , application réciproque), propriétés.

En dimension finie :

- Détermination de f par l'image d'une base.
- f linéaire est injective de E dans F ssi f transforme une base de E en une famille libre de F .
- f linéaire est surjective de E sur F ssi f transforme une base de E en une famille génératrice de F .
- f est un isomorphisme de E sur F ssi f transforme une base de E en une base de F .
- Si $f \in L(E,F)$, E de dimension finie et $\dim E = \dim F$ alors :
 f injective $\Leftrightarrow f$ surjective de E sur $F \Leftrightarrow f$ bijective de E sur F .
- Rang d'une application linéaire.
- Théorème du rang.

Matrices

- Représentation matricielle d'une application linéaire dans des bases données.
- Lien entre les opérations matricielles et les opérations entre applications linéaires associées.
- Matrice inversible, calcul de l'inverse d'une matrice.
- Rang d'une matrice

Remarque : Rien cette semaine sur les matrices de passage d'une base à une autre.

Questions de cours : démonstration

1. Soit E un espace vectoriel de dimension finie n non nulle et \mathcal{F} une famille de vecteurs de E :
Si $\text{card}(\mathcal{F})=n$ et \mathcal{F} est une famille libre alors \mathcal{F} est une base de E .
2. Soit E un espace vectoriel et $\mathcal{F} = (X_1, X_2, \dots, X_p)$ une famille de p vecteurs de E .
 $\text{rg}(X_1, X_2, \dots, X_p) = p \Leftrightarrow (X_1, X_2, \dots, X_p)$ est une famille libre.
3. Soit f une application linéaire de E dans F : f est injective si et seulement si $\ker f = \{O_E\}$.

Soit E un espace vectoriel de dimension finie non nulle et $f \in L(E,F)$

5. Si f transforme une base de E en une famille libre de F alors f est injective.
6. Si f est injective alors f transforme une base de E en une famille libre de F .