Exercice 1 : Soit l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x-2y+z, 2x-2y, x-2y+z) \end{array}$

Justifier que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
Déterminer une base de $Kerf$. f est-elle injective ? surjective ? bijective ?
Donner la matrice M de f dans la base canonique $\mathcal{B}_c$ de $\mathbb{R}^3$.
En notant $\mathcal{B}_c = (e_1, e_2, e_3)$. Donner la matrice M' de f dans la base $\mathcal{B}' = (e_2, e_3, e_1)$.
Déterminer une base de $Kerf^2$, déterminer $Kerf^3$.

Exercice 2 : Soit φ une application définie par : Pour tout M de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = M+ M^T$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer la dimension de $\ker\varphi$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Déterminer des propriétés sur $\ker\varphi$ et $\mathrm{Im}\varphi$ en travaillant sur cette matrice.

Exercice 3 : soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Soit f telle que : $\forall P \in E, f(P) = X^2P''(X+1) - XP'(X+1) + P(X+1)$
1) Justifier que f est un endomorphisme de E.
2) Montrer que la famille de vecteurs $\mathcal{B} = (1, X-1, (X-1)^2, (X-1)^3)$ est une base de E.
3) Déterminer la matrice M de f dans les bases $\mathcal{B}$. f est-elle bijective ?
4) Déterminer une base de $\ker f$ et de $\mathrm{Im} f$.
5) Déterminer la matrice de f dans les bases B_c base canonique de E.

Exercice 4 : soient f, g, h les endomorphismes de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associés aux matrices respectives :
$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3/2 & -2 \end{pmatrix}$

1. Déterminer, pour chaque endomorphisme, noyau et image. En donner une base, le cas échéant.
2. Soient $u_1 = (2, 0, 1)$, $u_2 = (1, 2, 0)$ et $u_3 = (1, 0, 0)$. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer la matrice de h dans la base $\mathcal{B}$.
3. Trouver une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$, telle que $\mathrm{Mat}(h, \mathcal{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 5 : soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soient f et g deux endomorphismes de E.

1. Montrer que $\mathrm{Ker} f \subset \mathrm{Ker}(g \circ f)$.
2. Montrer : $\mathrm{Ker}(g \circ f) \subset \mathrm{Ker} f \Leftrightarrow \mathrm{Im} f \cap \ker g = \{0_E\}$.
3. Supposons que $f \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ et $g \circ f = 0_{\mathcal{L}(E)}$. Justifier que dim $\mathrm{Ker} g \leq 1$.

Exercice 6 : Voici des matrices d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension 3 dans une base donnée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. Etudier leurs propriétés sans calcul : noyau, image,rang, inversibilité...
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 7 : on considère les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$:
$f_1 : x \mapsto e^{-x}, f_2 : x \mapsto xe^{-x}, f_3 : x \mapsto x^2e^{-x}$. On note $F = vect(f_1, f_2, f_3)$.

1. Montrer que la famille (f_1, f_2, f_3) est une base de F. On la note $\mathcal{B}$.
2. Soit D l'application définie par : $\forall f \in F, D(f) = f'$.
   Montrer que D est un endomorphisme de F et déterminer sa matrice A dans la base $\mathcal{B}$.
3. Comment calculer pour tout n de $\mathbb{N}$, la dérivée n-ième $h^{(n)}$ de la fonction $h : x \mapsto (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$?

Exercice 8 : soit m un réel.

Soit f_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A_m = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3-m \\ 0 & 4-m & 0 \\ 3-m & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de f_m suivant les valeurs de m.
2. En déduire $\text{Ker} f_m$ suivant les valeurs de m, et en donner une base le cas échéant.

Exercice 9 : Soient $E = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}_c = (1, X, X^2)$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $Mat(f, \mathcal{B}_c) = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -6 \\ 3 & -8 & 10 \\ 3 & -9 & 11 \end{pmatrix}$.

1. f est-elle bijective ?
2. Soient $P1 = X^2 + X - 1$, $P_2 = X + 3$ et $P_3 = X^2 + X$. Montrer que la famille $\mathcal{C} = (P_1, P_2, P_3)$ est une base de E.
3. Déterminer A' la matrice de f dans la base $\mathcal{C}$. Retrouver le résultat du 1.
4. Déterminer la matrice de f^n dans la base canonique, pour tout entier naturel n.

Exercice 10 : Soit n un entier $n \geq 3$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n. Soit $(e_1,\ e_2, ...,\ e_n)$ une base de E.
Soit u l'endomorphisme de E tel que $u(e_1) = e_1 + e_2 + ... + e_n$ et, pour tout $i,\ \ 2 \leq i \leq n,\ u(e_i) = e_1$
(1) Justifier pourquoi l'application u est bien définie.
(2) Déterminer une base B_1 de $F = Im(u)$. Donner le rang de u.
(3) Déterminer une base B_2 du noyau de u.
(4) Soit $\mathcal{F}$ la famille de vecteurs de E, obtenue par juxtaposition des bases B_2 de $\text{Ker}u$ et B_1 de $\text{Im}u$.
Démontrer que la famille $\mathcal{F}$ est une base de E, donner la matrice de u dans cette base.
Quelle est la relation matricielle entre les deux matrices associées à u ?

Exercice 11 : Soit A une matrice carrée de taille n, à coefficients complexes.
On définit la trace de A, notée $Tr(A)$, comme la somme des termes de la diagonale de A.
(1) Montrer : Pour toutes matrices carrées de même taille A et B : $Tr(AB) = Tr(BA)$.
(2) Justifier : Si deux matrices sont semblables, alors elles ont même trace. Que dire de la réciproque ?

Exercice 12 : Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont deux matrices semblables.

Exercice 13 - Exercice supplémentaire : autres calculs de puissances de matrices :

1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer J^n, puis A^n, pour n entier naturel.
2. Soit $C = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -10 \\ 2 & -5 & 10 \\ 2 & -6 & 11 \end{pmatrix}$
   1) Calculer $C^2 - 4C$. En déduire que C est inversible.
   2) Etudier la liberté de la famille (C, I_3).
   2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, il existe deux uniques réels a_n et b_n tels que $C^n = a_nC + b_nI_3$.
   On définit ainsi deux suites réelles $(a_n)_n$ et $(b_n)_n$.
   3) Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n , puis a_{n+2} en fonction de a_n et a_{n+1}.
   En déduire a_n en fonction de n et b_n en fonction de n.