Devoir à la maison 4 à rendre le lundi 14 ou le mardi 15 octobre 2024

Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne constituée de a boules blanches et b boules noires, et on pose $N = a+b$.

Expérience 1 :

On effectue une infinité de tirages d'une boule avec remise dans cette urne, et on introduit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_k "on obtient la première boule blanche au k^{ie} tirage".

1. Déterminer $P(A_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que presque sûrement, on obtient une boule blanche au cours de l'expérience.

Expérience 2 :

On effectue maintenant des tirages successifs d'une boule dans cette urne en procédant de la façon suivante :

- lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant
- lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne mais est remplacée par une boule blanche, avant le tirage suivant

1. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une boule blanche.
   (a) Justifier soigneusement l'ensemble des valeurs prises par la variable Z.
   (b) Déterminer la loi de Z. *On pourra vérifier que* $P(Z = b+1) = \frac{b!}{N^b}$.
2. On introduit pour tout entier n non-nul, et inférieur ou égal à b, X_n le nombre aléatoire de boules noires obtenues au cours des n premiers tirages avec pour convention $X_0 = 0$,
   (a) Justifier que $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
   (b) Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n)$.
   (c) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$: $P(X_n = k) = \frac{b-k+1}{N} P(X_{n-1} = k-1) + \frac{a+k}{N} P(X_{n-1} = k)$.
   (d) En déduire que $E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b+k(a+b-1)}{N} P(X_{n-1} = k)$ puis que $E(X_n) = (1 - \frac{1}{N})E(X_{n-1}) + \frac{b}{N}$.
   (e) Exprimer alors $E(X_n)$ en fonction de n.

Devoir à la maison 4 à rendre le lundi 14 ou le mardi 15 octobre 2024

Soit $a, b \in \mathbb{N}^*$. On considère une urne constituée de a boules blanches et b boules noires, et on pose $N = a+b$.

Expérience 1 :

On effectue une infinité de tirages d'une boule avec remise dans cette urne, et on introduit pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'événement A_k "on obtient la première boule blanche au k^{ie} tirage".

1. Déterminer $P(A_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que presque sûrement, on obtient une boule blanche au cours de l'expérience.

Expérience 2 :

On effectue maintenant des tirages successifs d'une boule dans cette urne en procédant de la façon suivante :

- lorsque la boule tirée est blanche, elle est remise dans l'urne avant de procéder au tirage suivant
- lorsque la boule tirée est noire, elle n'est pas remise dans l'urne mais est remplacée par une boule blanche, avant le tirage suivant

1. Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention d'une boule blanche.
   (a) Justifier soigneusement l'ensemble des valeurs prises par la variable Z.
   (b) Déterminer la loi de Z. *On pourra vérifier que* $P(Z = b+1) = \frac{b!}{N^b}$.
2. On introduit pour tout entier n non-nul, et inférieur ou égal à b, X_n le nombre aléatoire de boules noires obtenues au cours des n premiers tirages avec pour convention $X_0 = 0$,
   (a) Justifier que $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$.
   (b) Calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X_n = 0)$ et $P(X_n = n)$.
   (c) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![1, n]\!]$: $P(X_n = k) = \frac{b-k+1}{N} P(X_{n-1} = k-1) + \frac{a+k}{N} P(X_{n-1} = k)$.
   (d) En déduire que $E(X_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b+k(a+b-1)}{N} P(X_{n-1} = k)$ puis que $E(X_n) = (1 - \frac{1}{N})E(X_{n-1}) + \frac{b}{N}$.
   (e) Exprimer alors $E(X_n)$ en fonction de n.