Devoir à la maison 5 à rendre le mardi 5 novembre 2024

Option 1, pour ceux qui ont encore des difficultés de modélisation : exercice 1 et exercice 2 questions 1. à 3.
Option 2 : exercice 2
Option 3, pour ceux qui veulent un exercice encore plus abstrait (type ENS) : exercice 3

Exercice 1:

Une urne U contient 2 jetons noirs et 2 jetons blancs.

1. Déterminer la probabilité a d'obtenir deux jetons de même couleur, lorsqu'on tire simultanément deux jetons de l'urne U.
2. On considère l'expérience suivante : on tire simultanément 2 jetons de l'urne U, on note leur couleur puis on les remet dans l'urne.
   Soit un entier n fixé, $n \geq 2$, on répète cette expérience n fois.
   Soit N la variable aléatoire égale au nombre de fois où on a obtenu 2 jetons de la même couleur lors de ces n tirages. Donner la loi de N, préciser son espérance et sa variance.
3. On considère une nouvelle expérience : on tire simultanément 2 jetons de l'urne U. Si les deux jetons sont de la même couleur, on enlève ces deux jetons de l'urne U, si ils sont de couleurs différentes, on remet ces deux jetons dans l'urne U. Puis on recommence cette expérience jusqu'à ce que l'urne U soit vide.
   On note X le nombre de tirages nécessaires pour que l'urne U soit vide et X prend la valeur 0, si l'urne ne se vide jamais. On note A_1 l'événement "Au 1er tirage dans l'urne U, les deux jetons sont de la même couleur".
   (a) Préciser $X(\Omega)$.
   (b) Déterminer pour tout $k \geq 2$, $P(X = k)$. On pourra commencer par regarder $(X = 2)$ et $(X = 3)$.
   (c) En déduire la loi de X.
   (d) Montrer que X admet une espérance, la calculer.

Exercice 2:

Toutes les variables aléatoires dans ce problème sont supposées définies sur un même espace probabilisé noté $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$.

On dit qu'une variable aléatoire N, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifie une relation de Panjer s'il existe un réel $a < 1$ et un réel b tels que :

$$\mathrm{P}(N = 0) \neq 1 \quad \text{et} \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{P}(N = k) = \left(a + \frac{b}{k}\right) \mathrm{P}(N = k - 1).$$

1. On suppose **dans cette question** que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant une relation de Panjer avec $a = 0$ et b un réel strictement positif.
   (a) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \mathrm{P}(N = k) = \dfrac{b^k}{k!} \mathrm{P}(N = 0)$.
   (b) Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N = k)$. En déduire que N suit une loi de Poisson de paramètre b.
   Préciser son espérance et sa variance.
2. On suppose **dans cette question** que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant une relation de Panjer avec $a < 0$ et $b = -2a$.
   (a) Montrer que : $\forall k \geq 2, \quad \mathrm{P}(N = k) = 0$.
   (b) En déduire que N suit une loi de Bernoulli dont on précisera le paramètre uniquement en fonction de a.
3. On suppose **dans cette question** que Z suit une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0; 1[$.
   (a) Montrer que : $\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \mathrm{P}(Z = k) = \dfrac{p}{1 - p} \times \dfrac{n - k + 1}{k} \times \mathrm{P}(Z = k - 1)$.
   (b) En déduire que Z vérifie une relation de Panjer en précisant les valeurs de a et b correspondantes, en fonction de n et p.
4. On revient **dans cette question** au cas général : on suppose que N est une variable aléatoire, à valeurs dans $\mathbb{N}$, vérifiant la relation de Panjer avec a un réel vérifiant $a < 1$ et b est un réel quelconque.
   (a) Calculer $\mathrm{P}(N = 1)$. En déduire que $a + b \geq 0$.
   (b) Montrer que pour tout entier $m \geq 1$: $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k\mathrm{P}(N = k) = a \sum_{k=0}^{m-1} (k + 1)\mathrm{P}(N = k) + b \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{P}(N = k)$.

(c) En déduire que $\left((1-a)\sum_{k=1}^{m-1} k\mathrm{P}(N=k)\right)_{m\geq 1}$ est majorée, puis que N admet une espérance.
Préciser alors la valeur de $\mathrm{E}(N)$ en fonction de a et b.
On pourrait montrer à l'aide d'arguments similaires que N admet un moment d'ordre 2 et que :

$$\mathrm{E}\left(N^2\right) = \frac{(a+b)(a+b+1)}{(1-a)^2}.$$

(d) En déduire que N admet une variance et préciser la valeur de $\mathrm{V}(N)$ en fonction de a et b.
(e) Montrer que $\mathrm{E}(N) = \mathrm{V}(N)$ si, et seulement si, N suit une loi de Poisson.

Exercice 3: Des tirages à l'infini ne sont pas toujours quasi-impossible....

Partie 1 : Divers résultats théoriques

L'objectif de cette partie est de démontrer la prorpiété suivante :

Soit $(B_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements telle que pour tout $n \geq 1, B_{n+1} \subset B_n$. Alors $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n)$.

1. Un cas particulier :
Soit $(B_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements telle que pour tout $n \geq 1, B_{n+1} \subset B_n$ et $\lim_{n\to+\infty} P(B_n) = 0$.
   (a) Démontrer que $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = 0$.
   (b) Dans ce cas, l'hypothèse "pour tout $n \geq 1, B_{n+1} \subset B_n$" est-elle nécessaire ?
2. Cas général :
Soit $(B_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements telle que pour tout $n \geq 1, B_{n+1} \subset B_n$.
   (a) Pour tout $n \geq 1$, on note $A_n = \overline{B_n}$. Comparer les événements A_n et A_{n+1}.
   Justifier que la suite $(P(A_n))_n$ est convergente.
   (b) Pour tout $n \geq 1$, on note $C_n = A_{n+1} \backslash A_n$.
   Justfier que les événements $(C_n)_n$ sont incompatibles 2 à 2.
   (c) Exprimer $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$ en fonction de A_1 et des $(C_n)_{n\geq 1}$.
   (d) Démontrer alors que $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(B_n)$.

Partie 2 : Et encore des urnes !

On considère une urne contenant une boule blanche et une boule noire.
On effectue une série de tirages d'une boule jusqu'à obtenir une boule noire.
A chaque tirage amenant une boule blanche, on remet la boule blanche dans l'urne, et on multiplie par 2 le nombre de boules blanches présentes dans l'urne après la remise de la boule, puis on procède au tirage suivant.

L'objectif est de prouver que la probabilité de l'événement "on n'obtient jamais de boule noire" est strictement positive.

1. Etude pour un nombre fini de tirages :
Pour tout $n \geq 1$, on définit B_n l'événement "Les n premiers tirages ont lieu et n'amènent pas de boule noire", et on note $u_n = P(B_n)$.
   (a) Sans calculer u_n, justifier que le suite $(u_n)_{n\geq 1}$ est convergente.
   (b) Démontrer que $u_n = \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2^k}{1+2^k}$.
2. Etude à l'infini : On note J l'événement "L'expérience ne s'arrête jamais".
   (a) Démontrer que $P(J) = \lim_{n\to+\infty} u_n$.
   (b) Vérifier que pour tout $n \geq 1$, $-\ln(u_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \ln(1+2^{-k})$.
   (c) Démontrer que la série $\sum_{k\geq 0} \ln(1+2^{-k})$ est convergente.
   (d) En déduire que $P(J) > 0$.