Formule de l'anti-répartition et application

Soit $p \in]0,1[$.
L'objectif de ce problème est d'étudier la probabilité d'extinction d'une population dont les règles de vie et de reproduction sont :
• l'instant $n = 0$, la population est constituée d'un seul individu, noté I ;
• cet individu peut, à l'instant $n = 1$, donner naissance à deux autres individus avec la probabilité p, ou n'avoir aucune descendance avec la probabilité $1 - p$, puis il meurt ;
• ses descendants (s'il en a) à l'instant n se reproduisent de la même façon que l'individu I, et indépendamment les uns des autres, puis ils meurent et laissent place à leurs descendants et ainsi de suite ...

Dans la suite, on utilisera les notations suivantes :
• F est l'événement : "la lignée de I s'éteint" ;
• pour tout $n \in \mathbb{N}$, E_n est l'événement : "il n'y a plus d'individus à l'instant n" et on pose $u_n = P(E_n)$;
• G est la durée de vie de la lignée de I :

$$\begin{cases} \text{si } I \text{ n'a pas de descendance, alors } G = 0 \\ \text{s'il y a encore des individus à l'instant } n \text{ mais plus à l'instant } n+1, \text{ alors } G = n \\ \text{si la lignée de } I \text{ ne s'éteint jamais, alors } G \text{ n'est pas définie.} \end{cases}$$

Partie A : Une autre expression de l'espérance

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Question préliminaire : Echanges de sommes.
   Soit n un entier naturel non nul et $(a_{jk})_{j,k}$ des réels dépendants de 2 indices. Montrer : $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\sum\limits_{j=0}^{k} a_{jk} = \sum\limits_{j=0}^{n-1}\sum\limits_{k=j}^{n-1} a_{jk}$
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n)$.
3. On suppose dans cette question que X admet une espérance.

3.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $0 \leqslant nP(X > n) \leqslant \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} kP(X = k)$.
   On montrera soigneusement que la somme de la série a un sens.

3.2. En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} P(X > k)$ est convergente et que $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k)$.

4. Montrer le résultat suivant :

> X admet une espérance si et seulement si $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} P(X > k)$ est convergente, et dans ce cas :
>
> $$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

Partie B : Étude de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

5. Que vaut u_0 ?
6. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante puis qu'elle est convergente.

On note ℓ la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P(G = n) = u_{n+1} - u_n$ et en déduire que $P(F) = l$.
8. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = pu_n^2 + 1 - p$.
9. En déduire la valeur de l $\left(\text{on distinguera les cas } p \leqslant \dfrac{1}{2} \text{ et } p > \dfrac{1}{2}\right)$.

Partie C : Étude de la variable aléatoire G

On suppose dans la suite que $p \leqslant \dfrac{1}{2}$ et donc, d'après la partie précédente, $P(F) = 1$ ce qui signifie que G est presque sûrement définie.

10. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $P(G > n) = 1 - u_{n+1}$.
11. On suppose, dans cette question, que $p < \dfrac{1}{2}$.

11.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 - u_{n+1} \leqslant 2p(1 - u_n)$.

11.2. En déduire que la série de terme général $1 - u_n$ est convergente.

11.3. Montrer que G admet une espérance et que $E(G) \leqslant \dfrac{1}{1-2p}$.

12. On suppose, dans cette question, que $p = \dfrac{1}{2}$.

12.1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \neq 1$ et que $\dfrac{1}{1-u_{n+1}} - \dfrac{1}{1-u_n} = \dfrac{1}{1+u_n} \leqslant 1$.

12.2. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\dfrac{1}{1-u_n} - 1 = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{1-u_{k+1}} - \frac{1}{1-u_k} \right) \leqslant n$.

12.3. Montrer que la série de terme général $1 - u_n$ est divergente.
Est-ce que G admet une espérance ?