BCPST2-2 - Devoir maison n°6 - A rendre le mardi 12 novembre 2024

Une suite de polynômes

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels,

et pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à n.

On définit la suite de polynômes $(T_n)_n$ par :
$T_0(X) = 1$, $T_1(X) = X$, et pour tout entier naturel n, $T_{n+1}(X) = 2XT_n(X) - T_{n-1}(X)$.

1. Déterminer les polynômes T_2, T_3, T_4, et préciser leur degré et leur coefficient dominant.
2. Questions en Python :
   (a) Comment stocker en Python les polynômes T_0, T_1, T_2, T_3 et T_4 ? Proposer une structure de données.
   (b) Ecrire une fonction Python **Coeff_Tn**, prenant en argument d'entrée un entier n, et donnant en sortie les coefficients du polynôme T_n.
   (c) Ecrire une fonction Python **Evalue_Tn**, prenant en argument d'entrée un entier n et un réel x, et donnant en sortie le réel $T_n(x)$.
3. Après avoir établi une conjecture sur le degré et le coefficient dominant de chaque polynôme T_n ($n \in \mathbb{N}$), la démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence sur n.
4. Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\theta \neq 0[\pi]$, c'est-à-dire que pour tout entier relatif k, $\theta \neq 0 + k\pi$.
   On définit la suite $(v_n)_{n\geq 0}$ par : $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = T_n(\cos\theta)$.
   (a) Quelle relation de récurrence vérifie cette suite ?
   (b) Déterminer les racines complexes du polynôme $P(X) = X^2 - 2\cos(\theta)X + 1$.
   Vous donnerez l'écriture algébrique, puis l'écriture exponentielle de ces racines.
   (c) En déduire que pour tout $n \geq 0$, $v_n = \cos(n\theta)$.
5. Montrer que pour tout $n \geq 0$, T_n est l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que : $\forall \theta \in \mathbb{R}, T_n(\cos\theta) = \cos(n\theta)$.
6. Une exploitation des polynômes $(T_n)_n$:
   L'objectif de cette question est de linéariser l'expression $2 + 3\cos(\theta) - \cos^2(\theta) + \cos^3(\theta)$, c'est à dire de transformer les produits de cosinus en des sommes, c'est-à-dire les termes du type $\cos^k(\theta)$ en des sommes de termes du type $\cos(j\theta)$.
   (a) Montrer que le polynôme $P = 2 + 3X - X^2 + X^3$ est combinaison linéaire des vecteurs (T_0, T_1, T_2, T_3).
   Cette décomposition est-elle unique ?
   (b) En exploitant la question 5., linéariser l'expression $2 + 3\cos(\theta) - \cos^2(\theta) + \cos^3(\theta)$.
   (c) Proposer une méthode du même type pour linéariser $\cos^4(\theta)$.
7. Facultatif : Racines du polynôme T_4 :
   (a) Donner le nombre maximal de racines réelles du polynôme T_4.
   (b) Résoudre l'équation $\cos(4x) = 0$ d'inconnue le réel x. Combien de solutions a cette équation ?
   (c) En déduire que T_4 admet exactement 4 racines réelles distinctes, et qu'elles appartiennent à $[-1, 1]$.
   (d) Ecrire le polynôme T_4 sous forme factorisée dans $\mathbb{R}[X]$.
   (e) Sans calcul supplémentaire, et en utilisant la question c), que pouvez-vous dire des racines du polynôme dérivé T_4' ?
   (f) Donner une allure de la courbe représentative du polynôme T_4. (Il n'est pas demandé de faire un dessin précis, en particulier il n'est pas nécessaire de respecter les échelles. En revanche, faire apparaître les informations remarquables.)
8. Facultatif : retour au cas général, racines du polynôme T_n : Soit $n \geq 1$.
   (a) Donner le nombre maximal de racines réelles du polynôme T_n.
   (b) Résoudre l'équation $\cos(nx) = 0$ d'inconnue le réel x. Combien de solutions a cette équation ?
   (c) En déduire que T_n admet exactement n racines réelles distinctes, et qu'elles appartiennent à $[-1, 1]$.
   (d) Sans calcul supplémentaire, et en utilisant la question c), que pouvez-vous dire des racines du polynôme dérivé T_n' ?