BCPST2-2 - Devoir maison 7 - A rendre le mardi 19 novembre 2024

Espaces vectoriels de polynômes - Formule de Taylor

On note $E = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.
Pour tout polynôme P de E, et tout k de $\mathbb{N}$, on note $P^{(k)}$ le polynôme dérivé k-ième de P.
C'est-à-dire : $P^{(0)} = P$, $P^{(1)} = P'$, $P^{(2)} = P''$, etc...

Partie 1 : quelques exemples.

1. Exemple 1 : Soit $Q_0(X) = 1, Q_1(X) = X - 4, Q_2(X) = (X-4)^2, Q_3(X) = (X-4)^3$.
   Soit $P(X) = X^3 + X^2 - X + 1$.
   (a) P est-il combinaison linéaire des polynômes $(Q_k)_{0\leq k\leq 3}$? Si oui, donner une telle combinaison linéaire. Cette décomposition est-elle unique ?
   (b) Calculer $P^{(k)}(4)$ tout k de $\mathbb{N}$. Donner l'expression du polynôme $\sum\limits_{k=0}^{3} \dfrac{P^{(k)}(4)}{k!}(X-a)^k$. Qu'en dire ?
2. Soient $P \in E$, $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}^*$. Rappeler la définition de " a est une racine de P d'ordre de multiplicité m".
3. Exemple 2 : Soit $H(X) = X^4 + 5X^3 + 2X^2 - 15X - 9$.
   (a) Justifier que -3 est racine multiple de H. Factoriser le polynôme H en produit de facteurs de polynômes de degré 1. En déduire l'ordre de multiplicité de -3.
   (b) Soit $Q_0(X) = 1, Q_1(X) = X + 3, Q_2(X) = (X+3)^2, Q_3(X) = (X+3)^3, Q_4(X) = (X+3)^4$.
   H est-il combinaison linéaire des polynômes $(Q_k)_{0\leq k\leq 4}$? Cette décomposition est-elle unique ?
   (c) Calculer $H^{(k)}(-3)$ tout k de $\mathbb{N}$. Donner l'expression du polynôme $\sum\limits_{k=0}^{4} \dfrac{H^{(k)}(-3)}{k!}(X-a)^k$. Qu'en dire ?

Partie 2 : Formule de Taylor pour un polynôme $P_N = X^N$ avec $N \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout k de $\mathbb{N}$, $P_N^{(k)} = \begin{cases} \dfrac{N!}{(N-k)!}X^{N-k} \text{ si } 0 \leq k \leq N \\ 0 \text{ si k>N} \end{cases}$
2. En déduire que pour tout réel a, $\sum\limits_{k=0}^{N} \dfrac{P_N^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k = P_N(X)$.
   Cette égalité est appelée *formule de Taylor* du polynôme X^N en a.

Partie 3 : Formule de Taylor pour un polynôme P quelconque.

3. Calcul annexe 1 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_{ik})_{i,k}$ dépendants de 2 indices. Montrer : $\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{i=0}^{k} a_{ik} = \sum\limits_{i=0}^{n}\sum\limits_{k=i}^{n} a_{ik}$
4. Calcul annexe 2 : Soient i, k, N des entiers naturels.
   Exprimer $\binom{N}{k}\binom{k}{i}$ comme un produit de deux autres coefficients binomiaux faisant intervenir $i, k-i, N, N-i$.
5. Soit $P = \sum\limits_{j=0}^{n} a_j X^j$ un polynôme de $\mathbb{R}[X]$. ($n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, .., a_{n+1}$ réels)
   Soit a un réel. Démontrer en utilisant la partie 2 pour chaque polynôme X^j puis les calculs annexes, que :
   $$P(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!}(X-a)^k.$$ Cette égalité est appelée *formule de Taylor* du polynôme P en a.

Partie 4 : diverses applications de la formule de Taylor.

6. Application 1 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit $(Q_k)_{0\leq k\leq n}$ la famille de polynômes définies par $Q_k(x) = (X-a)^k$ pour tout k de $[\![0, n]\!]$. C'est une famille de vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$.
   Quelles propriétés possèdent cette famille ? Que représente-t-elle pour l'espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$?
7. Retour sur les exemples de la partie 1 : pourrions-nous répondre plus rapidement aux questions posées ? Que dire des remarques ?
8. Application 2 : ordre de multiplicité d'une racine. Soient P un polynôme, $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}^*$.
   Démontrer que si $P(a) = 0, P'(a) = 0, ..., P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$, alors a est une racine de P d'ordre de multiplicité m.

Partie 5 : Partie subsidiaire, la réciproque

Soient P un polynôme, $a \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}^*$.

On admet le résultat suivant : *Division euclidienne du polynôme P par $(X-a)^m$.*

Pour tout polynôme P, il existe un unique couple (Q, R) de polynômes tels que : $\begin{cases} deg(R) < m \\ \text{et } P = (X-a)^m Q + R. \end{cases}$

9. A partir de la formule de Taylor appliquée au polynôme P en a, donner une expression explicite du couple de polynôme (Q, R) associé à la division euclidienne de P par $(X-a)^m$.
   Q et R seront donnés sous forme d'une somme, en fonction de P et de a.
10. On suppose maintenant que a est racine de P d'ordre de multiplicité m.
    Démontrer que $P(a) = 0, P'(a) = 0, ..., P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.

Nous avons ainsi démontré le résultat suivant (Hors programme) :
a est racine de P d'ordre de multiplicité $m \Leftrightarrow P(a) = 0, P'(a) = 0, ..., P^{(m-1)}(a) = 0$ et $P^{(m)}(a) \neq 0$.