BCPST2-2 - Devoir maison n°8 - A rendre le mardi 26 novembre 2024

Autour des hyperplans

Définition : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$.
On appelle un hyperplan de E, un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$.

Partie 1 : En dimension 2 et 3, en particulier dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

1. Quels sont les hyperplans de $\mathbb{R}^2$? Que dire de l'intersection de 2 hyperplans distincts de $\mathbb{R}^2$?
   Le démontrer.
2. Quels sont les hyperplans de $\mathbb{R}^3$? Que dire de l'intersection de 2 hyperplans distincts de $\mathbb{R}^3$?
   On ne demande pas une démonstration. Une interprétation graphique sera suffisante.

Partie 2 : Une propriété générale : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que : $(f_1, f_2, ..., f_n)$ est une base de F et $(g_1, g_2, ..., g_p)$ est une base de G.

1. On suppose dans cette question uniquement que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_E\}$:
   Soient $\lambda_1, ..., \lambda_n, \mu_1, ..., \mu_p$ des scalaires de $\mathbb{K}$ tels que $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_n f_n + \mu_1 g_1 + ... + \mu_p g_p = 0_E$.
   Justifier que le vecteur $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + ... + \lambda_n f_n$ appartient à F$\cap$ G.
   En déduire que la famille $(f_1, f_2, ..., f_n, g_1, g_2, ..., g_p)$ est libre.
2. Supposons que la famille $(f_1, f_2, ..., f_n, g_1, g_2, ..., g_p)$ est libre. Montrer que $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_E\}$

Nous avons ainsi démontré la propriété suivante :
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que $(f_1, f_2, ..., f_n)$ est une base de F et $(g_1, g_2, ..., g_p)$ est une base de G alors $\boxed{\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0_E\} \Leftrightarrow \text{la famille } (f_1, f_2, ..., f_n, g_1, g_2, ..., g_p) \text{ est libre.}}$

Partie 3 : Soit E un $\mathbb{K}-$espace vectoriel de dimension 4.
Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E tels que dim F=dim G=3 et F$\neq$G.
On rappelle que F$\cap$G est un espace vectoriel. Notre objectif est de déterminer la dimension de F$\cap$G.

1. Justifier que dim (F$\cap$G) $\leq$2.
2. Prouver en exploitant la partie 2, que dim (F$\cap$G)$>$0.
3. Supposons dans cette question que dim (F$\cap$G)=1.
   (a) Montrer qu'il existe des vecteurs e, f_1, f_2, g_1, g_2 tels que la famille (e, f_1, f_2) est une base de F, et la famille (e, g_1, g_2) est une base de G.
   (b) Démontrer que la famille (e, f_1, f_2, g_1, g_2) est une famille libre. (Indication : Utiliser une démarche similaire de la partie 2, question 1.)
   (c) Mettre en évidence une contradiction.
4. En déduire la dimension de F$\cap$G.
5. Question facultative : Construction d'une base de E
   (a) Justifier qu'il existe des vecteurs e_1, e_2, f, g de E tels que la famille (e_1, e_2, f) est une base de F et la famille (e_1, e_2, g) est une base de G.
   (b) Démontrer que la famille (e_1, e_2, f, g) est une base de E.

Partie 4 : Soit l'espace vectoriel E=$\mathbb{R}_3[X]$.

Soient φ et ψ les deux applications définies par :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P(1) - P'(-1) \end{array} \quad \text{et } \psi : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & P'(1) \end{array}$$

1. Montrer que les applications φ et ψ sont des formes linéaires.
2. Déterminer une base de kerφ et une base de kerψ.
3. D'après la partie 3, que dire de la dimension de ker$\varphi \cap$ kerψ ?
   Donner une base de ker$\varphi \cap$ kerψ