BCPST2-2 - Programme de colle de Mathématiques - 2024-2025

Semaine du lundi 6 janvier 2025 au vendredi 10 janvier 2025 Semaine 11

Format des colles : on reste sur le format classique, le trinôme ensemble en 1 heure

Valeur propre - Sous-espace propre pour un endomorphisme ou une matrice carrée

- Définitions d'une valeur propre, du spectre, d'un vecteur propre, d'un sous-espace propre.
- Caractérisation d'une valeur propre à l'aide du rang.
- Dimension d'un sous-espace propre par le théorème du rang.
- Valeurs propres d'une matrice diagonale, d'une matrice triangulaire.
- Propriétés pour la matrice transposée.
- Cas particulier des matrices 2×2.
- Propriété : Deux matrices semblables ont mêmes valeurs propres.

Propriétés de famille finie de vecteurs propres

- Toute famille finie de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- Toute famille finie de vecteurs obtenue par juxtaposition de bases de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
- dimE$=n$. Un endomorphisme de E (ou une matrice $n \times n$) admet au plus n valeurs propres distinctes.
- dimE$=n$. La somme des dimensions des sous-espaces propres d'un endomorphisme de E (ou d'une matrice $n \times n$) est inférieure ou égale à n.

Endomorphismes et matrices diagonalisables

- Définitions.
- Condition nécessaire et suffisante de diagonalisation par la somme des dimensions des sous-espaces propres.
- Condition suffisante de diagonalisation : dimE$=n$. Un endomorphisme de E possédant n valeurs propres distinctes est diagonalisable, et chaque sous-espace propre est de dimension 1.
- Condition suffisante de diagonalisation, théorème spectral : Toute matrice symétrique réelle M est diagonalisable et il existe P et D deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que P est inversible, D est diagonale et $M = PDP^{-1}$.

Questions de cours : énoncé et démonstration

1. Formule de changement de base pour la matrice d'un endomorphisme.
2. Nombre maximal de valeurs propres d'un endomorphisme en dimension finie ou d'une matrice carrée.
3. DimE$=n$. Propriété de la somme des dimensions des sous-espaces propres d'un endomorphisme de E.
4. DimE$=n$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Si f est diagonalisable alors la somme des dimensions des sous-espaces propres de f est égale à n.
5. dimE$=n$. Un endomorphisme de E possédant n valeurs propres distinctes est diagonalisable, et chaque sous-espace propre est de dimension 1